

# Trasformazioni di sistemi di riferimento

Paolo Zatelli

Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Università di Trento

# Outline

- 1 Sistemi di riferimento
- 2 Trasformazioni di sistemi di riferimento
- 3 Trasformazioni di sistemi di riferimento cartografici
- 4 Trasformazioni di sistemi di riferimento regionali

# Sistemi cartografici

Chi utilizza prodotti cartografici deve sapere cosa è un sistema di riferimento, quali sistemi esistono e come si passa da un sistema all'altro.

I calcoli per la trasformazione di datum sono solitamente fatti dai programmi di gestione della cartografia (es. GIS) o da programmi specializzati a cui bisogna sapere cosa chiedere e di cui si deve sapere interpretare i risultati, sia per evitare errori grossolani sia per conoscere la diminuzione della precisione legata alle trasformazioni.

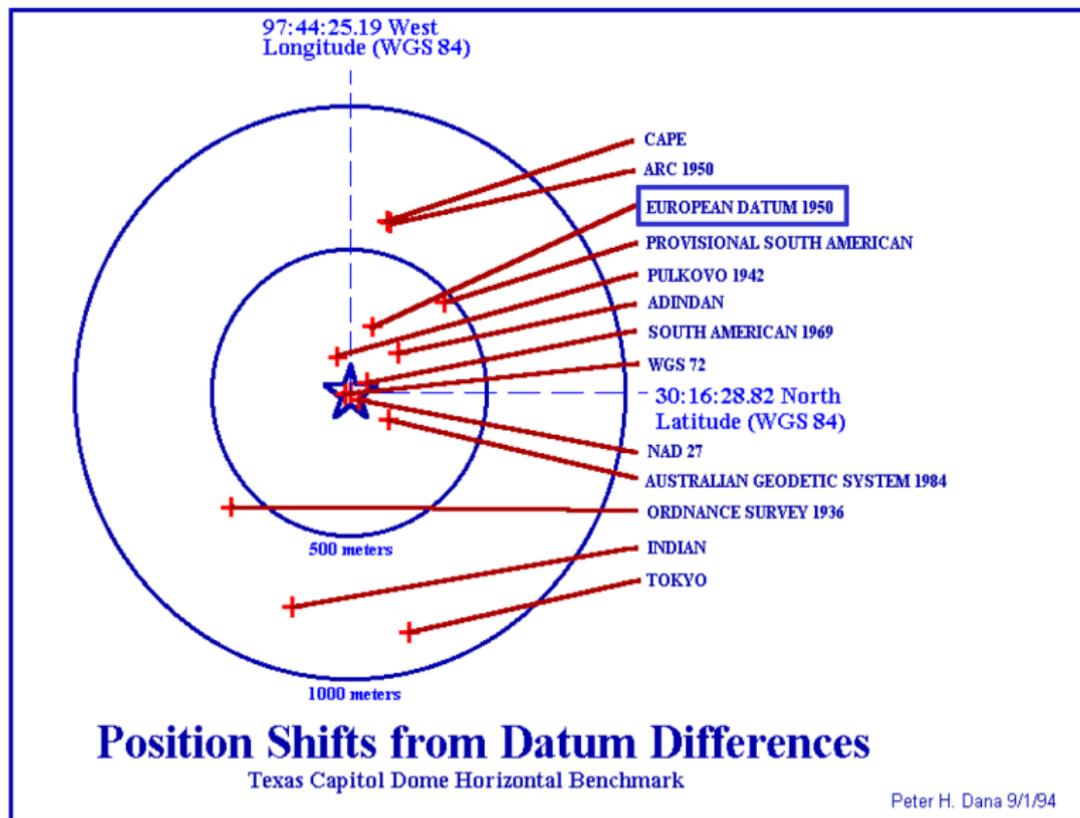
# Sistemi di riferimento

La necessità di effettuare cambiamenti di sistema di riferimento deriva da:

- esistono sistemi globali e locali;
- esistono diversi sistemi locali;

Il solo cambiamento di sistema di riferimento porta a differenze di coordinate anche di centinaia di metri.

# Differenze tra sistemi di riferimento



# Sistemi cartografici

Per fare cartografia è necessario fissare:

- sistema di riferimento (datum): scelta dell'ellissoide e orientamento;
- rete di punti e misure che *realizzano* il sistema di riferimento;
- il tipo di rappresentazione cartografica ed i parametri di applicazione.

I primi due punti individuano il sistema di riferimento e quindi sono le basi di partenza per realizzare una trasformazione di sistema di riferimento.

# Trasformazione di sistemi di riferimento

Nel scegliere un sistema di riferimento si fissano alcuni parametri arbitrari che corrispondono ai gradi di libertà.

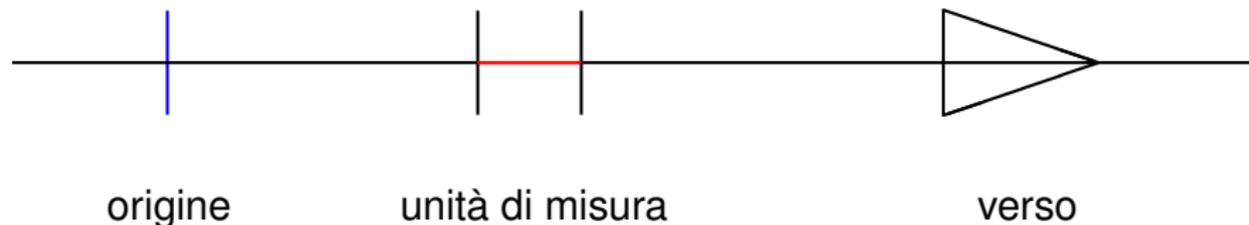
Nella trasformazione tra sistemi di riferimento si deve individuare le relazioni tra questi parametri.

Spesso però si introducono nella trasformazione funzioni e parametri aggiuntivi che “aggiustano” le distorsioni presenti nelle realizzazioni dei sistemi di riferimento.

# Trasformazione di sistemi di riferimento 1D

In una dimensione si fissano:

- origine
- unità di misura (scala)
- verso



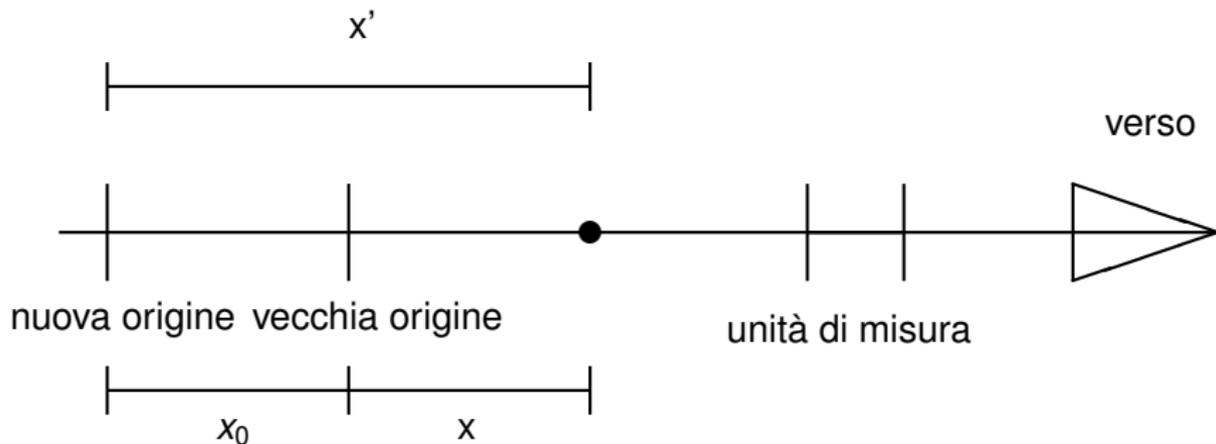
# Trasformazione di sistemi di riferimento 1D

Le possibili trasformazioni sono:

- cambio di origine  $x' = x + x_0$
- scala  $x' = \lambda x$
- verso  $x' = -1 * x$ , è un caso particolare con  $\lambda = -1$

La trasformazione generale è quindi  $x' = \lambda x + x_0$ .

# Trasformazione di sistema di riferimento 1D

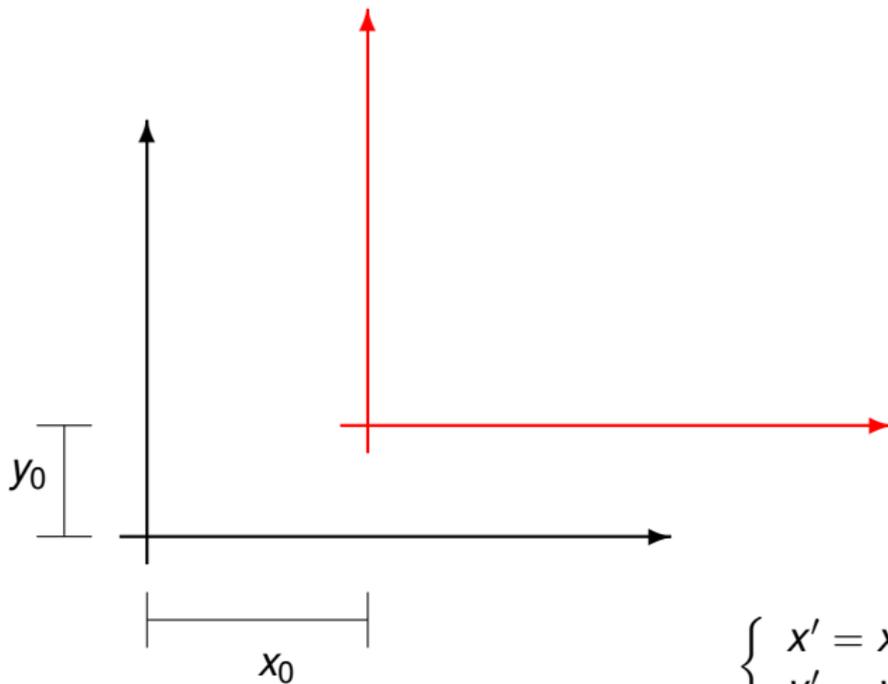


# Trasformazione di sistema di riferimento 2D

In due dimensioni si fissano:

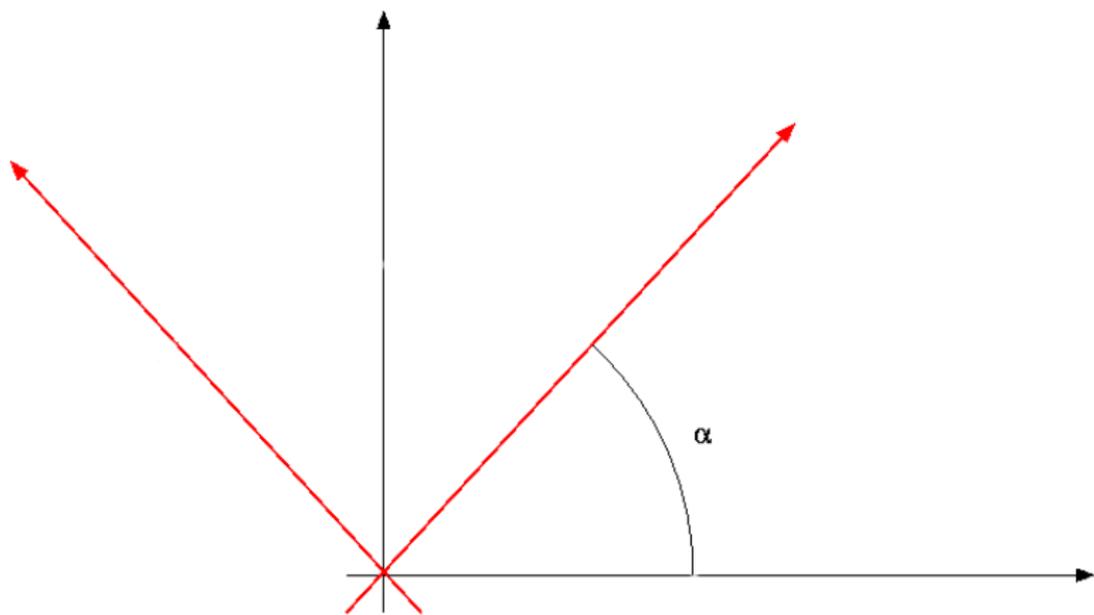
- origine
- orientamento
- scala

# Variazione di origine



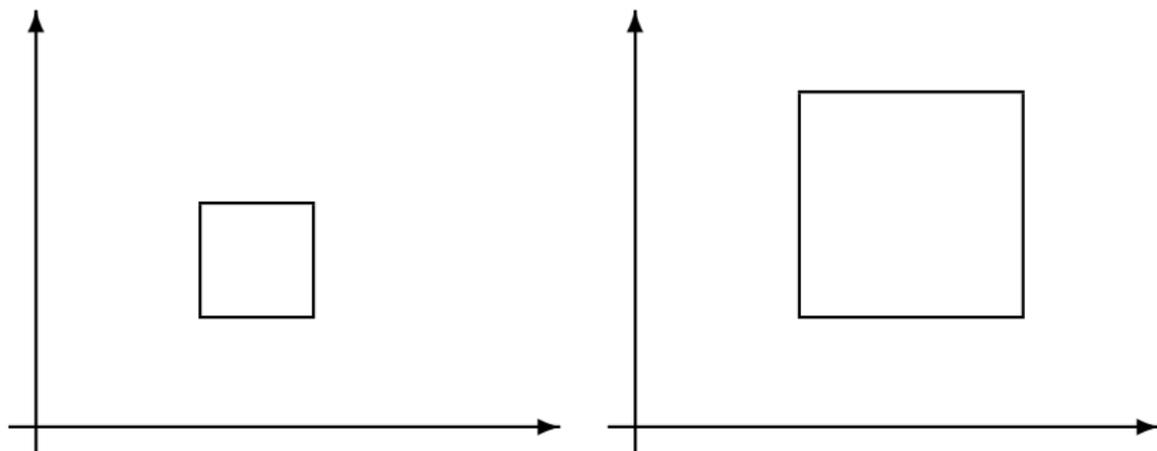
$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

# Rotazione



$$\begin{cases} x' = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ y' = x[-\sin(\alpha)] + y\cos(\alpha) \end{cases}$$

# Variazione di scala



$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

# Rototraslazione e variazione di scala

La trasformazione generale è quindi una *rototraslazione con variazione di scala*:

$$\begin{cases} x' = \lambda[x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)] + x_0 \\ y' = \lambda[x(-\sin(\alpha)) + y\cos(\alpha)] + y_0 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

# Rototraslazione e variazione di scala

La trasformazione non è lineare, si pone

$$\lambda \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

cioè  $\lambda \cos(\alpha) = a$  e  $\lambda \sin(\alpha) = b$ .

È ovviamente possibile calcolare  $\lambda$  e  $\alpha$  a partire da  $a$  e  $b$  con le

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a}$$

# Rototraslazione e variazione di scala

La trasformazione si scrive quindi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

# Trasformazione affine

Si può scrivere una trasformazione più generale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

la rototraslazione ha  $c = -b$  e  $d = a$ .

Non corrisponde ad una modifica di sistema di riferimento, ma può essere visto come:

- una rotazione
- due variazioni di scale, diverse nelle due direzioni
- una ulteriore rotazione
- una traslazione

# Trasformazione di sistema di riferimento 3D

In tre dimensioni la trasformazione è analoga a quella 2D, con un fattore di scala, tre angoli e tre traslazioni:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

con  $R$  matrice di rotazione che contiene prodotti di seni e coseni di tre angoli.

# Trasformazione di sistemi di riferimento

Le trasformazioni tra sistemi di riferimento usano questo tipo di relazioni: ad es. il passaggio ED50 - Roma40 corrisponde ad una rototraslazione (l'ellissoide è lo stesso), è come “spostare” l'ellissoide.

Spesso però si utilizzano forme più generali (es. affine) per tenere conto delle incertezze e distorsioni delle reti che materializzano i sistemi di riferimento.

# Trasformazione di sistemi di riferimento

In teoria le trasformazioni sono rototraslazioni ma le distorsioni della rete che realizza il sistema Roma 40 obbliga a usare parametri aggiuntivi, la scelta più comune è aggiungere un fattore di scala.

L'introduzione di un fattore di scala implica una deformazione isotropa della rete, spesso si applica la trasformazione a zone per rendere questa ipotesi accettabile.

In applicazioni particolare su piccola scala (navigazione marittima o aerea), quando si possono accettare basse precisioni, si utilizza una sola traslazione, ponendo a zero le rotazioni.

# Trasformazione di sistemi di riferimento

La trasformazione tra sistemi di riferimento si fa passando da

$$\begin{array}{c} (\phi, \lambda, h)_1 \\ \downarrow \\ (\phi, \lambda, h)_2 \end{array}$$

ma nei sistemi di riferimento locali (Roma40, ED50) si conosce  $H$  e non  $h$ .

# Trasformazione di sistemi di riferimento

Sono possibili due approcci:

- 1 si calcola  $h$  da  $H$  conoscendo l'ondulazione del geoide  $N$ ,  
 $h = N + H$ , ma si perde in precisione
- 2 si effettua una trasformazione  $(\phi, \lambda, H)_1 \rightarrow (\phi, \lambda, h)_2$ , separando la planimetria dalla quota, ad es. con le formule di Molodenskij

# Calcolo dei parametri delle trasformazioni

I parametri di trasformazione tra sistemi di riferimento sono calcolati utilizzando le stesse espressioni usate per la trasformazione delle coordinate ma sono note le coordinate di alcuni punti e incogniti i parametri.

Solitamente si scrive un sistema sovradeterminato (con più equazioni che incognite) per avere:

- individuazione di eventuali errori grossolani nelle coordinate
- stima delle varianze dei parametri calcolati e quindi della precisione della trasformazione

## Trasformazione WGS84 - Roma40

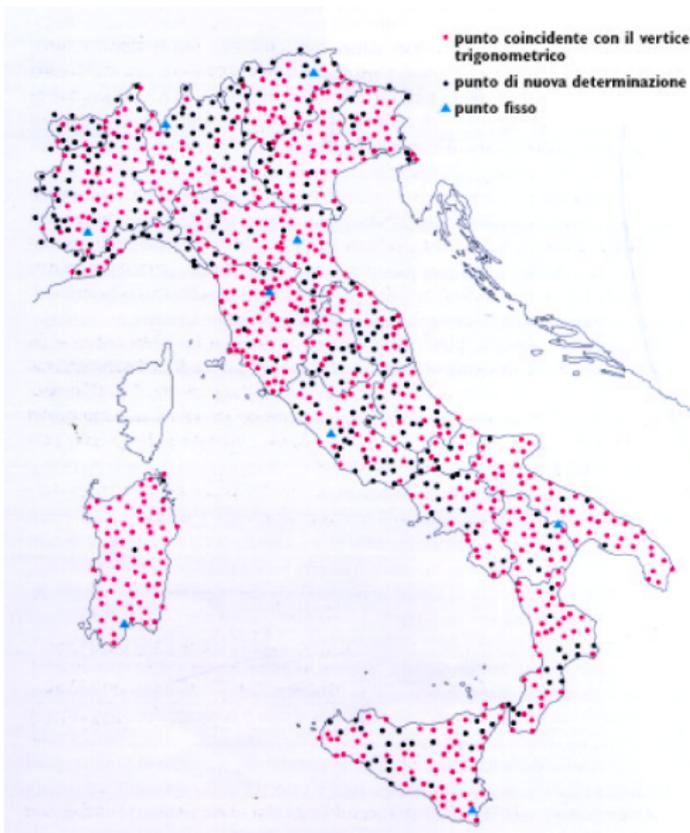
La trasformazione tra WGS84 e Roma40 è effettuata attraverso la rete IGM95 (1230 punti), materializzazione italiana del WGS85.

La trasformazione è effettuata con una rototraslazione con variazione di scala (7 parametri), per assorbire le deformazioni della rete che materializza Roma40.

La trasformazione viene fatta  $(\phi, \lambda, H)_{Roma40} \rightarrow (\phi, \lambda, h)_{WGS84}$

Altra soluzione è effettuare la trasformazione localmente supponendo l'ondulazione del geoide costante.

# Punti IGM95



# Trasformazione WGS84 - Roma40

In coordinate ellissoidiche:

$$\begin{cases} X = (N + H) \cos B \cos L \\ Y = (N + H) \cos B \sin L \\ Z = [(1 - e^2)N + H] \sin B \end{cases}$$

con  $L$  longitudine,  $B$  latitudine e  $H$  quota,  $N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}$  raggio di curvatura in primo verticale,  $a$  semiasse minore ed  $e^2$  eccentricità dell'ellissoide.

## Trasformazione WGS84 - Roma40

La linearizzazione delle formule sopra porta alle formule di Molodenskij, che esprimono le variazioni di longitudine, latitudine e quota in funzione delle coordinate stesse e dei parametri della rototraslazione con variazione di scala.

In queste espressioni le variazioni delle coordinate planimetriche e quelle della quota sono disaccoppiate.

Queste espressioni possono quindi essere usate per il calcolo dei parametri separando planimetria e quote.

## Trasformazione WGS84 - Roma40

A causa delle distorsioni nella rete che materializza il sistema Roma40 i parametri della trasformazione sono calcolati su aree limitate (10–15 km) usando punti doppi (WGS84 – Roma40) in un intorno di 30 km.

Si usano punti su aree più vaste per rendere congruenti i risultati della trasformazione applicata a punti vicino ai bordi di due zone contigue.

Questi parametri non sono significativi dal punto di vista geometrico: non indicano le traslazioni e le rotazioni tra i due ellipsoidi e **sono validi solo in ambito locale**.

# Trasformazione WGS84 - Roma40 - quote

Sono state trasformate  $h$  del WGS84 (IGM95) in  $H$  con il modello di geoidi Italgeo95.

Ai punti che corrispondono a capisaldi di livellazione geometrica (con quote quindi più precise) è stato dato peso doppio.

# Trasformazione WGS84 - Roma40

Il calcolo dei parametri con questa procedura ha dato i seguenti risultati:

- per zone contigue i parametri hanno lo stesso ordine di grandezza
- i punti sulle zone di confine hanno differenza *massima* tra 10 e 20 cm per le coordinate calcolate con i parametri delle due zone

# Trasformazione IGM95

La trasformazione usata da IGM95 è una linearizzazione della rototraslazione e variazione di scala 3D:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = (1 + K)R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

con  $R$  matrice di rotazione linearizzata:

$$\begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix}$$

# Ordini di grandezza dei parametri della trasformazione

Param.	media	sqm	min	max
$X_0$	122.88 m	67.43 m		
$Y_0$	24.15 m	36.27 m		
$Z_0$	-3.43 m	56.35 m		
$T$	144.80 m	61.32 m	41.85 m	552.11 m
$K$	18.78 ppm	12.90 ppm	-11.39 ppm	54.94 ppm
$R_x$	0.66"	1.73"		
$R_y$	-2.30"	1.21"		
$R_z$	-0.68"	1.75"		
$R$	3.45"	1.34"	0.87"	16.58"

dove  $T = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}$  e  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$  sono rispettivamente la traslazione e la rotazione totali.

# Interpolazione su griglie

L'approccio per aree attorno ai punti IGM95 ha il problema della non coerenza, nelle zone di confine, dei valori di coordinate trasformate con i parametri di due zone vicine.

Si è quindi cambiato approccio, calcolando i parametri della trasformazione su una griglia regolare (5' latitudine e 7'30" in longitudine, corrisponde alle tavolette al 25000 IGM) a partire dai quali si ricavano i valori in qualunque punto con una interpolazione bilineare, che è continua.

# Interpolazione su griglie

I residui nella creazione delle griglie sono inferiori a 10 cm nell'80% ed inferiori a 20 cm nel 90% dei casi.

Le differenze tra coordinate calcolate in questo modo e in quello a zone differiscono per la maggior parte dei punti di meno di 10 cm.

I vantaggi di questo approccio sono:

- maggiore semplicità e velocità nella procedura di calcolo;
- la funzione è globalmente continua, non ci sono ambiguità su quale set di parametri usare, come per l'altro approccio al confine su due zone.

# Trasformazione di coordinate planimetriche “regionali”

Sono stati calcolati dal Geom. Di Girolamo i parametri di trasformazione tra coordinate del Catasto Fondiario e Gauss Boaga (su Roma40) e tra WGS84-EUREF89 (UTM) e Gauss Boaga (su Roma40), pubblicate sul Bollettino Ufficiale della Regione Trentino Alto Adige, n. 19/I-II del 20 aprile 1999.

Le trasformazioni fanno un adattamento locale delle trasformazioni tra sistemi di riferimento e i parametri non hanno un preciso significato fisico.

# Da Catasto Fondiario a Gauss Boaga (su Roma40)

$$\begin{cases} N_{GB} = P + Sud \cdot \alpha_1 + Ov \cdot \beta_1 - CorpN \\ E_{GB} = Q + Ov \cdot \alpha_2 + Sud \cdot \beta_2 - CorpE \end{cases}$$

dove  $N_{GB}$  e  $E_{GB}$  sono le coordinate nord ed est nel sistema di riferimento Roma40 e proiezione Gauss-Boaga,  $Sud$  e  $Ov$  ordinata e ascissa nel sistema del Catasto Fondiario e  $CorpN$  e  $CorpE$  correzioni polinomiali.

A parte le correzioni polinomiali è una trasformazione affine.

# Da Catasto Fondiario a Gauss Boaga (su Roma40)

I parametri valgono:

$$\alpha_1 = -0.9995286255174110$$

$$\alpha_2 = -0.9995585118198990$$

$$P = 5237886.85170$$

$$\beta_1 = -0.0302554088272202$$

$$\beta_2 = -0.0302795936059684$$

$$Q = 1681116.87177$$

# Da Catasto Fondiario a Gauss Boaga (su Roma40)

Le correzioni polinomiali valgono:

$$CorpN = a_1 + a_2 \cdot SuR + a_3 \cdot OvR + a_4 \cdot Sur^2 + a_5 \cdot OvR^2 + a_6 \cdot SuR \cdot OvR$$

$$CorpE = b_1 + b_2 \cdot SuR + b_3 \cdot OvR + b_4 \cdot Sur^2 + b_5 \cdot OvR^2 + b_6 \cdot SuR \cdot OvR$$

con

$$SuR = Sud - Smed = Sud - 108939.13359$$

$$OvR = Ov - Omed = Ov - 17361.47654$$

e  $a_1 \dots a_6, b_1 \dots b_6$  opportuni coefficienti (vanno a zero velocemente, il primo è circa 1 l'ultimo circa  $10^{-9}$ ).

# Da (UTM su) WGS84-EUREF89 a Gauss Boaga (su Roma40)

$$\begin{cases} N_{GB} = P + N_{bz} \cdot \alpha_1 + E_{bz} \cdot \beta_1 \\ E_{GB} = Q + E_{bz} \cdot \alpha_2 + N_{bz} \cdot \beta_2 \end{cases}$$

dove  $N_{GB}$  e  $E_{GB}$  sono le coordinate nord ed est nel sistema di riferimento Roma40 e proiezione Gauss-Boaga,  $N_{bz}$  e  $E_{bz}$  sono le coordinate nord ed est nel sistema di riferimento WGS84 e proiezione UTM.

È una trasformazione affine.

# Da (UTM su) WGS84-EUREF89 a Gauss Boaga (su Roma40)

I parametri valgono:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1.00001586139729 & \beta_1 &= 0.00000816953815234324 \\ \alpha_2 &= 1.00001587189443 & \beta_2 &= -0.00000816372109252845 \\ P &= -63.43479941 & Q &= 1000060.11675565\end{aligned}$$

Il valori di  $Q$  “aggiusta” la differenza di falsa origine est delle due proiezioni.

# Bibliografia

Benciolini B., 2004, *Dispensa sui sistemi di riferimento*, comunicazione personale.

Di Girolamo A., , Bollettino Ufficiale della Regione Trentino Alto Adige, n. 19/I-II del 20 aprile 1999.

Donatelli D., Maseroli R., Pierozzi M., 2002, *La trasformazione tra i sistemi di riferimento in Italia*, Bollettino di geodesia e scienze affini, anno LXI, n.4, pp 247–281.

Pierozzi M., Surace L., 2000, *I parametri di trasformazione tra il sistema WGS84 ed il sistema geodetico nazionale Roma40*, Bollettino di geodesia e scienze affini, anno LIX, n.1, pp 37–55.

Surace L., 1998, *La georeferenziazione delle informazioni territoriali*, Bollettino di geodesia e scienze affini, anno LVII, n. 2, pp. 181-234.

Questa presentazione è ©2009 Paolo Zatelli, disponibile come



Attribuzione-Non commerciale-Condividi allo stesso modo 2.5 Italia

### Tu sei libero:



di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera



di modificare quest'opera

### Alle seguenti condizioni:



**Attribuzione.** Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.



**Non commerciale.** Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.



**Condividi allo stesso modo.** Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

- Ogni volta che usi o distribuisi quest'opera, devi farlo secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso, puoi concordare col titolare dei diritti utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.
- Questa licenza lascia impregiudicati i diritti morali.