



POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Appunti di topografia

Original

Appunti di topografia / C. Sena. - ELETTRONICO. - (2013).

Availability:

This version is available at: 11583/2518647 since:

Publisher:

Published

DOI:

Terms of use:

openAccess

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

*Schede / appunti
di*

TOPOGRAFIA

(con alcune esercitazioni)

Carmelo Sena

E' un modo diverso, forse più moderno, di presentare i diversi argomenti considerati essenziali, nella *preparazione di base* della TOPOGRAFIA.

Le schede trattano infatti in modo snello ed asciutto concetti e passaggi, per una maggiore chiarezza e semplicità di quelle parti della **Geodesia** utili alla **Topografia operativa** ed alla **Cartografia**.

Viene fatto altrettanto nel capitolo del **Trattamento delle misure (o osservazioni) topografiche** e nei cenni di **Fotogrammetria aerea**.

Sono così trattate tutte le parti che costituiscono l'attuale "*corpus*" del corso di Topografia, senza troppo entrare negli argomenti così detti "specialistici". Alla fine, vengono riportati gli argomenti sviluppati nelle **Esercitazioni**, con riferimenti più specifici alle strumentazioni e ad alcuni esercizi pratici.

Il testo è composto in definitiva da 6 capitoli:

1. Elementi di Geodesia
2. " di Cartografia
3. Trattamento delle Misure topografiche
4. Topografia operativa
5. Cenni di Fotogrammetria aerea
6. Esercitazioni topografiche

E' stata fatta un'*introduzione generale* che spiega come il testo sia nato, con quali criteri e finalità e che mette l'accento sulle sue particolarità rispetto ad un testo classico. E' riportato un *indice generale* (somma degli indici dei vari capitoli).

Per ogni capitolo, viene fatta una *premessa breve* che introduce gli argomenti trattati, con spesso anche un riferimento storico e con i limiti della trattazione. Segue l'indice degli argomenti principali svolti nel capitolo (*indice particolare* di capitolo).

All'inizio (nel 1° capitolo) è stato introdotto un breve insieme di concetti-punti per meglio chiarire quali sono le finalità ed i legami scelti per questa trattazione (in totale 16 schede, che precedono la trattazione della Geodesia).

Premessa

Questa raccolta, in qualche modo ordinata di schede, era la base delle lezioni da me tenute nei Corsi di laurea per Ingegneri Civili nel Politecnico di Torino, negli ultimi anni del mio insegnamento (2002-2007). Sono, nell'arco dell'ultimo decennio in particolare, molte volte cambiate per adeguarle al sempre minore tempo a disposizione per le lezioni e per dare, assieme a concetti ritenuti di base, le novità ed i progressi più importanti avvenuti anche nella disciplina, sempre limitatamente agli aspetti professionalizzanti. Spesse volte sono molto sintetiche (inquadrano il tema o l'argomento, poi integrato in sede di esposizione), altre invece contengono anche brevi descrizioni. Queste ultime riguardano argomenti su cui si ritiene di dovere dare una più ampia informazione perché riguardano tematiche più recenti. Si è fatta attenzione a non sovrapporre troppo argomenti trattati sia a lezione che nelle esercitazioni/laboratori.

Le schede richiamano e chiariscono quindi i concetti e le formule che ho stimato più importanti per la preparazione, trascurandone purtroppo altri. Le dimostrazioni sono state ridotte al minimo, anche con metodi non sempre rigorosi ma più vicini ai metodi ingegneristici. Si sono così aggiunte schede di sintesi, per aiutare a vedere i collegamenti tra i vari passaggi. Sono stati limitati gli accenni per certi argomenti superati ma ancora necessari per seguire e capire *l'evoluzione storica* della disciplina

La materia del Corso è divisa in due parti: la prima riguarda gli elementi di Geodesia e Cartografia ed il Trattamento delle Misure topografiche. La seconda tratta la Topografia operativa, elementi di Fotogrammetria e le Esercitazioni. Un breve cenno per una novità, rispetto al passato, è rappresentata ad esempio dal concetto di *Sistema di Riferimento in Geodesia*: infatti con l'avvento dei sistemi "G. P. S." ed in generale con lo sviluppo delle principali tecniche spaziali, si è passati da una visione quasi statica dei problemi geodetici/ topografici ad una visione dinamica. Non si definisce perciò un unico sistema valido su scala planetaria, ma diversi sistemi rispondenti a differenti vincoli anche temporali (epoche) e realizzabili con differenti livelli di precisione. Occorre fare attenzione perché esistono così sistemi per applicazioni topo-cartografiche ma non adatti ad esempio per operazioni di controllo del territorio.

Occorre notare che: negli ultimi cento anni circa, si sono avuti notevoli episodi evolutivi, a cominciare dall' utilizzazione tecnica della fotografia che ha portato alla nascita della “*fotogrammetria*”, diventata la principale produttrice di “*cartografie*”.

Negli anni 60/70 l'arrivo dei “*distanziometri a onde e.m.*” è stato un altro apporto importante .

Ma il grande salto è avvenuto con l'avvento dei “**sistemi tipo GPS**” (nati a sviluppo militare) ed infine con le recenti strumentazioni “**laser-scanner**”. In Topografia sono scivolte cioè applicazioni della Fisica, Informatica, Elettronica, Navigazione spaziale, ecc. che ne hanno arricchito e modificato le procedure operative : quindi un grande interscambio tra settori e filoni del mondo della ricerca, con espressioni ed influssi diversi

Infine, una considerazione generale sui “contorni” della disciplina: oggi esistono in quasi tutti i Paesi, cartografie anche a grande scala, sulle quali è possibile “leggere” molte informazioni sia qualitative che quantitative, con dettagli e precisioni legate alle scale delle carte

Esistono inoltre sistemi informatizzati (ad esempio su “*internet*”) che forniscono immagini del territorio georeferenziate anche a grandissima scala, su quasi tutto il pianeta (ad esempio in *Google*). Settore in grande effervescenza è questo dei *servizi Web per la Cartografia*: si rivolge ad Utenti diversi per fornire informazioni sia di immagini che di dati topografici -cartografici. Il problema da risolvere a più livelli è ancora quello dell'**omogeneizzazione**: infatti oggi dati e prodotti da software diversi, sono memorizzati in formati differenti, spesso proprietari, che ostacolano il loro libero accesso e sono disponibili solo se si possiede software in grado di interpretarli. Occorrerebbe avere invece a disposizione dei formati standard ed è quindi necessario un importante processo di *standardizzazione dell'informazione geografica*. Tutto questo è gestito oggi però sia da topografi o cartografi ma essenzialmente da informatici, con qualche problema. Ed infine ci sono da diversi anni, *sistemi satellitari* che permettono a molti utilizzatori di effettuare il posizionamento di punti in tempo reale in quasi tutte le regioni della Terra, con diverse precisioni: sono previsti inoltre altri interessanti sviluppi ed utilizzi già nei prossimi anni.

Forse le schede di lezioni che qui vengono mostrate e proposte sono allora oggi considerabili superate ed inutili? Si possono forse ottenere gli stessi risultati, nelle necessità professionali, ricorrendo ad alcune di queste nuove tecniche?

La comprensione delle operazioni, anche delle nuove tecnologie, richiede credo ancora le conoscenze di base della Topografia, fornite per inquadrarne i limiti e le prestazioni ed in qualche caso anzi richiederebbe maggiori estensioni ed approfondimenti rispetto a quelli da noi qui dati.

A conclusione, qualche “veloce” **ringraziamento**: anzitutto ai Colleghi che , oltre che *amici*, mi sono stati “*guida*”: in particolare a Giuseppe **Inghilleri**, Mariano **Cunietti** e Bruno **Astori** (alcuni purtroppo non più tra noi); ai tanti validi **Collaboratori** che ho avuto la fortuna di avere avuto. E a mia moglie che mi ha “*sopportato*” con tanta pazienza anche in questa modesta finale fatica.

Torino giugno 2013

*Si prega di volere comunicare eventuali errori ed omissioni riscontrate a
carmelosena@virgilio.it*

CONCETTI INTRODUTTIVI

Cosa tratta la TOPOGRAFIA :

Determinazione e rappresentazione metrica di parti della superficie della TERRA

Ripartizione della materia:

- GEODESIA
- CARTOGRAFIA
- TRATTAMENTO delle MISURE
 - STRUMENTI e OPERAZIONI
 - CENNI di FOTOGRAMMETRIA

a) Principi fondanti della Topografia

Necessità di rispondere a certe domande:

1. Dove ci troviamo? (cioè: qual è la nostra posizione sulla superficie della Terra?)
2. Dove si trova un corpo che ci interessa?
3. Quant'è distante, da chi ?
4. Quali sono i limiti, i contorni di una certa area e come si possono ricostruire?
5. Qual é la forma di un corpo?
6. ...

Queste **domande** trovano risposte più o meno dettagliate nello svolgimento dei vari argomenti suggeriti, con finalità sia tecniche/pratiche che scientifiche.

Principali scopi della Topografia

1) Descrizione geometrica di:

Superfici

- Della nostra Terra o delle sue parti
- Di altri corpi celesti



CARTOGRAFIA

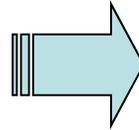
Forme di manufatti

- Sulla superficie della Terra
- ...

2) Posizionamento e/o localizzazione di punti:

Fissi

- Naturali
- Artificiali



X, Y, Z

Mobili



X, Y, Z, t

3) Variazione di posizione (**deformazioni**) **$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta t$**

*L'obiettivo fondamentale, in sostanza, è la determinazione di **coordinate di punti**, con diverse precisioni a seconda delle finalità, ed in opportuni **sistemi di riferimento** (globali o locali).*

b) Principi fondanti della Topografia

Occorre fare cenno ad alcune **grandezze geometriche**:

1. Punti
2. Angoli
3. Distanze tra punti su rette (anche verticali)
4. Distanze tra punti su linee

e ad alcune **grandezze fisiche**, ad esempio:

il tempo

Occorre disporre di **riferimenti** : *necessità di introdurre sistemi di*

*riferimento e di coordinate, collegate al campo di **gravità terrestre**.*

Si richiede la conoscenza di:

SISTEMI di RIFERIMENTO (S.R.):

Globali

Locali

{ per prodotti *geodetici*
per prodotti *cartografici*

SISTEMI di COORDINATE (S.C.):

Generali

Locali

Il sistema di riferimento è costituito da:

SUPERFICIE di RIFERIMENTO (**Su.R.**):

Globale

Locale

PARAMETRI CHE DEFINISCONO la **Su.R.** :

Dimensioni del corpo solido



4 parametri: ***a, e, GM, ω***

Posizione nello spazio

La superficie di riferimento (Su.R.)

NATURALE (o FISICA):

della Gravità



Geoidi (sup. equipotenziali)

GEOMETRICA :

Sferoidi  **Ellisoidi**  Sfera locale  Piano tangente

Ellissoide	{	Locale
		Geocentrico

Un percorso di *studio* possibile può essere rappresentato dai seguenti 9 punti:

1. Definire una superficie di riferimento

Come si perviene alle superfici equipotenziali della gravità:

GEOIDE

Come si passa agli sferoidi ed agli ellipsoidi:

SUPERFICI GEOMETRICHE

Come si lavora sugli:

ELLISSOIDI

Caratteristiche di una superficie di riferimento

Trattabilità matematica:

Ellissoide biassiale, matematicamente facile da trattare ma non individuabile fisicamente e senza significatività fisica. Oggi con la metodologia satellitare acquista anche più facile individuabilità.

Individualità fisica:

Meglio il **geoide** in ogni suo punto ortogonale alla direzione del filo a piombo, fisicamente riproducibile e significativo.

Significatività fisica:

Cioè capacità di denunciare le differenze di potenziale della gravità. I satelliti ad esempio risentono molto poco delle variazioni del campo di gravità terrestre e forniscono solo informazioni geometriche, della superficie.

Sistemi di coordinate (S.C.)

GENERALI:

Geografiche

- Geoidiche o astronomiche (φ_a, λ_a)
- Ellissoidiche (φ_e, λ_e)

Geocentriche

- X, Y, Z (superficie di riferimento ellissoide  G.P.S)

LOCALI:

Geodetiche

- Polari (s, α)
- Rettangolari (x, y)

Terna Euleriana

Trasformazioni da:

SISTEMI di RIFERIMENTO LOCALI



SISTEMI di RIFERIMENTO GLOBALE

(ed alle varie realizzazioni)

2. Definire i sistemi di coordinate

3. Come si passa dalla **superficie di riferimento** alla superficie del piano **cartografico**:

- a. Equazioni di corrispondenza (in generale)
- b. Moduli di deformazione ed equazioni delle carte:
 - *Isogoniche*
 - *Equivalenti*
 - *Afilattiche*
- c. Cartografie ufficiali italiane
- d. Cartografia numerica

c) Principi fondanti della Topografia

Introduzione del concetto di *misura*:

1. Cosa vuole dire “misurare”?
2. Quali sono le operazioni di misura che ci interessano?
3. Misure sulle grandezze **geometriche** e fisiche...

Necessità di introdurre *sistemi di riferimento* e *sistemi di coordinate*

d) Principi fondanti della Topografia

Sorge l'esigenza di disporre di adeguati **strumenti** di misura delle grandezze geometriche:

- derivanti dai principi dell'ottica
- derivanti dalla meccanica di precisione
- derivanti dalla trasmissione delle onde e dall'elettronica

Necessità di introdurre anche strumenti di **calcolo** e di **disegno**.

4. Introduzione alla teoria delle misure:

- Misure dirette
- Misure indirette
- (Misure condizionate)

5. Misure di grandezze topografiche e strumenti:

Per la misura di:

- angoli
- distanze
- dislivelli e quote

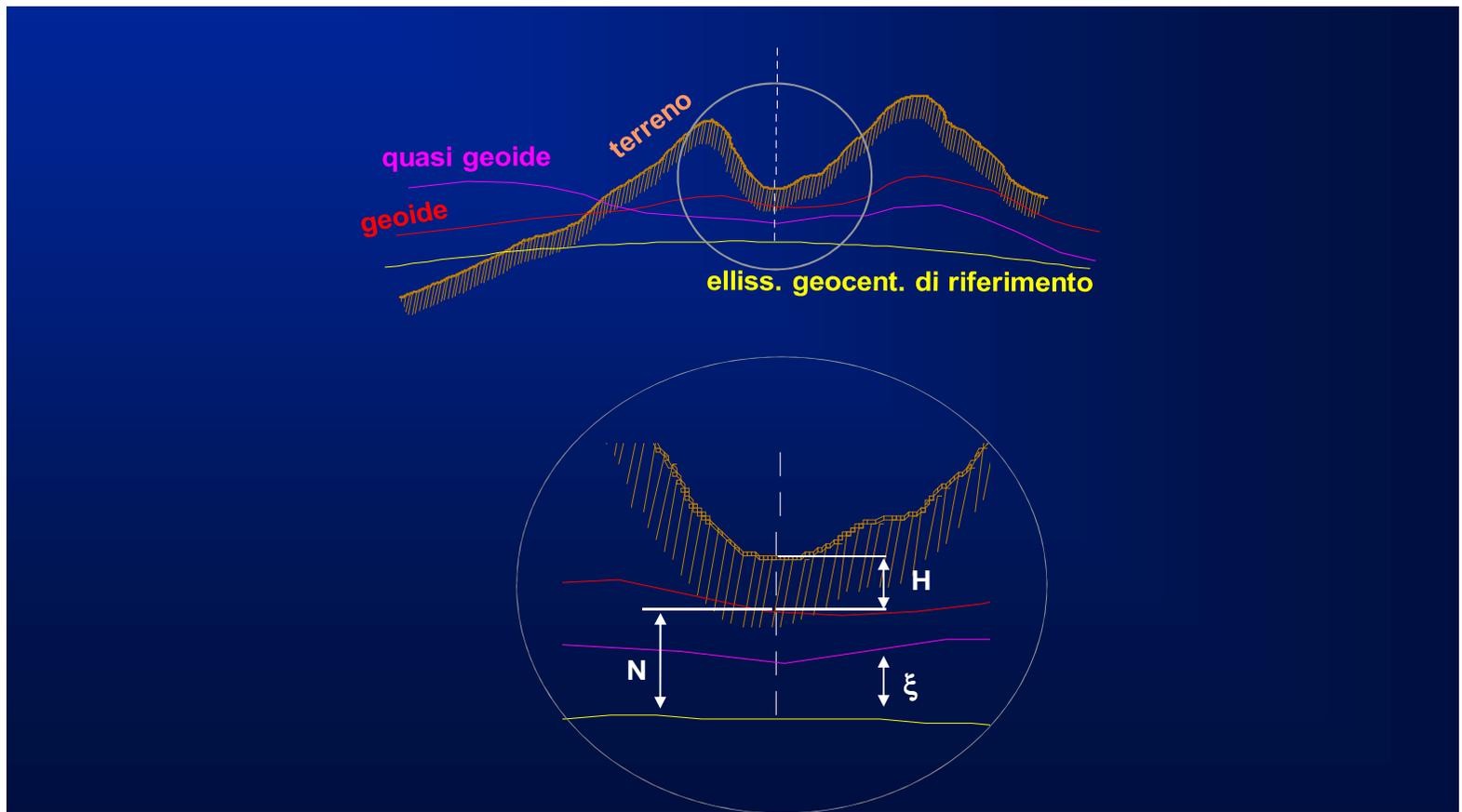
6. Reti e rilievi di dettaglio
7. Strumenti speciali
8. Sistemi di riferimento
9. Fotogrammetria (cenni)



Due moderni strumenti usati in Topografia: il LASER SCANNER(a sinistra) ed una STAZIONE TOTALE integrata con antenna GPS (a destra)



1-Elementi di Geodesia



PREMESSA

Si fanno solamente cenni di **Geodesia** (svincolata dalla bidimensionalità), quindi c'è una limitatezza anche spinta di trattazione, perché finalizzata a quanto si ritiene supporto necessario per un corso di Topografia.

Vediamo le cognizioni necessarie che vengono fornite e la loro successione:

1. Definizione delle superfici di riferimento, ovvero dei modelli matematici che meglio approssimano la superficie fisica della Terra, facendo riferimento al campo di gravità terrestre; si giunge alla superficie equipotenziale della gravità, detta **geoide** ed alle sue caratteristiche.
2. Si passa quindi all'approssimazione con gli **ellipsoidi di rotazione**, di solito maggiormente utilizzati
3. Per giungere, in situazioni limite, alla **sfera** locale o al **piano** tangente
4. Si fa vedere come si può lavorare sugli ellipsoidi, dalla definizione degli **schiacciamenti** geometrico e gravimetrico, ai concetti di **sistemi di riferimento** ed alle **coordinate geografiche** (astronomiche ed ellissoidiche).
5. Si fanno cenni al **calcolo di archi** di parallelo, archi di meridiano ed alle linee geodetiche, utilizzando la geometria differenziale e dalla definizione dei **raggi di curvatura** principali.
6. Si giunge alle **operazioni di misura** sull'ellissoide (distanze ed angoli) ed agli importanti teoremi della Geodesia Operativa
7. Si trattano le **operazioni di calcolo** nel campo geodetico o di Weingarten e nel campo topografico, con cenni al teorema di Legendre.
8. Vengono trattati i problemi, diretto ed inverso, del **trasporto** di coordinate geografiche
9. Ed i problemi di **trasformazione** di coordinate geodetiche, da rettangolari a polari e viceversa.

1-Indice generale

Premessa

1. Concetti introduttivi
2. Principi fondanti
3. Principali scopi
4. Sistemi di riferimento e superfici di riferimento
5. Da superficie di riferimento a superficie cartografica

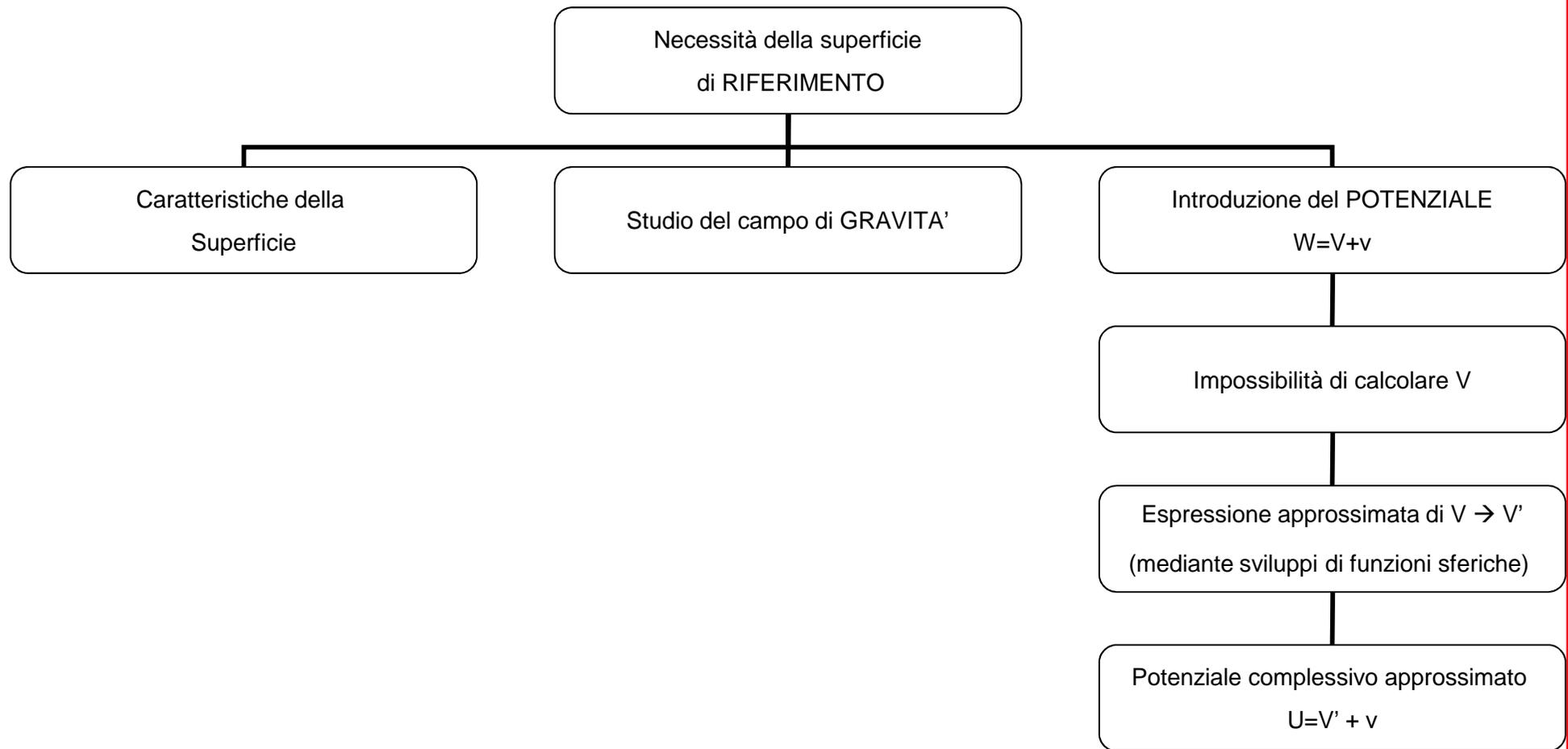
1-1-Indice Elementi di Geodesia

1.	Forze derivanti dai movimenti della Terra	36
2.	“ “ da azioni di tipo e.m.	38
3.	Forza di gravità	41
4.	Analogia dinamica	42
5.	Gravimetro	43
6.	Espressione matematica della superficie di riferimento	50
7.	Determinazione della gravità approssimata	57
8.	Schiacciamento geometrico e gravimetrico	59
9.	Relazione di Clairaut	62
10.	Equazione dello sferoide in coordinate polari	63
11.	Espressione della gravità approssimata	65
12.	Passaggio da sferoide ad ellissoide 47	67
13.	Sviluppo in serie di armoniche sferiche	67
14.	Sistemi di riferimento	70
15.	Superfici	74
16.	Coordinate geografiche	77
17.	Determinazione coordinate geografiche astronomiche	78
18.	Equazioni parametriche dell'ellissoide	82
19.	Raggi di curvatura	85

1-2-Indice -GEODESIA

20. Determinazione valori dei raggi di curvatura	
21- Lunghezza di archi	88
22-Equazione delle geodetiche	91
23-Deviazione della verticale	92
24-Anomalia di gravità e formule di Bruns	96
25-Operazioni di misura e teoremi della geodesia operativa	99
26-Operazioni di calcolo	104
27-Campo geodetico o di Weingarten e campo topografico	111
28-Cenni di trigonometria sferica	112
29-Teorema di Legendre	115
30-Problemi di trasporto coordinate	117
31- “ di trasformazione di coordinate	119
	122

GEODESIA (ric.1)



Le schede "ric.". sintetizzano gli argomenti trattati.

Forze derivanti dai moti della Terra

La Terra ha numerosi movimenti (~14). I più importanti sono:

- il **MOTO di ROTAZIONE** attorno al suo asse polare: la Terra compie un giro completo in un giorno siderale (più corto del giorno solare medio)
 - 86400 secondi in un giorno solare medio
 - 86164,091 secondi in un giorno siderale

Si introduce la **velocità angolare**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164.091} = 7.2884 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad [\text{C.G.S.}]$$

Questo moto causa sui punti della Terra un'accelerazione centripeta (a_c):

$$a_c = \omega^2 \cdot r$$

Una particella del globo, di massa unitaria m , è quindi sollecitata da una **forza centrifuga**:

$$f_c = m \cdot a_c = m \cdot \omega^2 r = 1 \cdot \omega^2 r$$

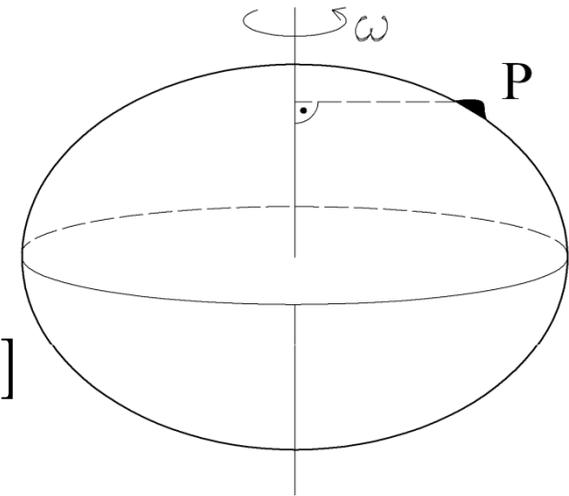


FIG.1

Forze derivanti dai moti della Terra

- il **MOTO di RIVOLUZIONE** intorno al Sole: la Terra compie un'orbita completa in un anno siderale (366,2422 giorni siderali o 365,2422 giorni solari medi)

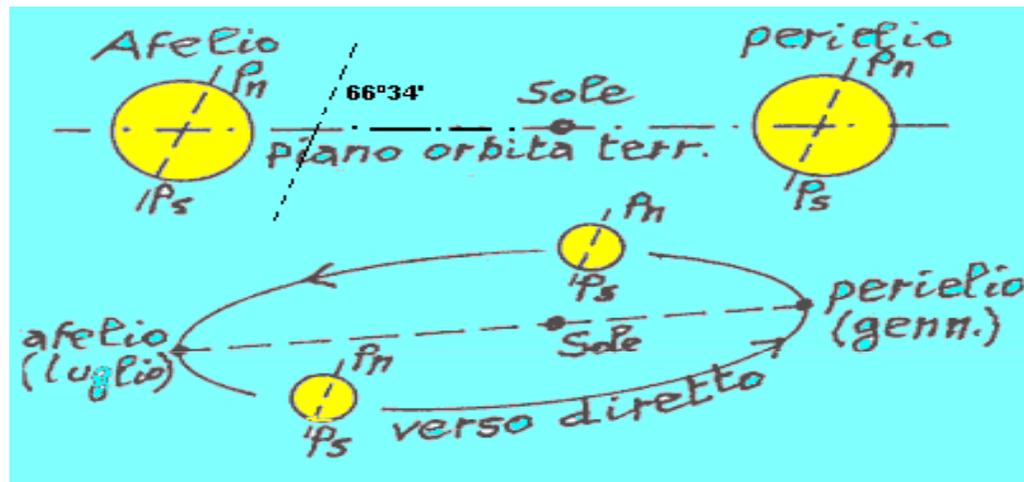


FIG.2

- velocità media circa $30.000 \text{ m/s} \approx 108.000 \text{ Km/h}$
- percorso fatto in un anno, circa $\approx 946.080.000 \text{ Km}$

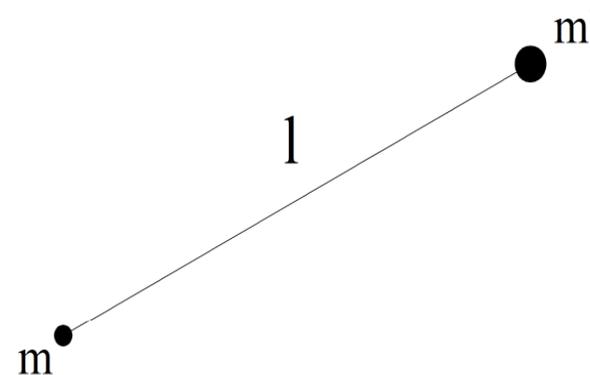
Questo moto NON causa praticamente nessuna accelerazione e quindi nessuna forza.

Anche il moto di tutto il sistema solare (verso la stella α Lyrae ?), che può essere considerato come una perturbazione più o meno sensibile dei moti principali, non provoca accelerazioni apprezzabili.

Forze derivanti da azioni di tipo elettromagnetico.

- Le forze derivanti da azioni di tipo elettromagnetico sono di natura diversa e di notevole entità: sono azioni che sollecitano le particelle della Terra e si identificano con l'ATTRAZIONE NEWTONIANA, la cui espressione generale per due punti generici di massa m ed m' è descritta dalla seguente equazione:

$$F_N = G \cdot \frac{m \cdot m'}{l^2} \quad G = 66,7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2}$$



Nel caso della Terra, in relazione ad una massa puntiforme concentrata nel punto P e di valore unitario, deve applicarsi la formula per elementi infinitesimi dM della massa della Terra (G = costante di gravitazione universale):

$$dF = G \cdot \frac{dM \cdot 1}{l^2}$$

Massa: nell'equazione fondamentale della dinamica, si collega il vettore *forza* con il vettore accelerazione mediante un coefficiente di proporzionalità m , chiamato massa. Si definiscono la massa inerziale e la massa-gravitazionale: l'esperienza dimostra che esse coincidono. La massa varia con la velocità del corpo $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$

Forze finali

La forza risultante, cioè la somma geometrica di tutte le forze elementari, esprime *l'attrazione newtoniana* esercitata dall'intera massa della Terra sul punto P e si ottiene integrando l'equazione

$$F = \int_V dF$$

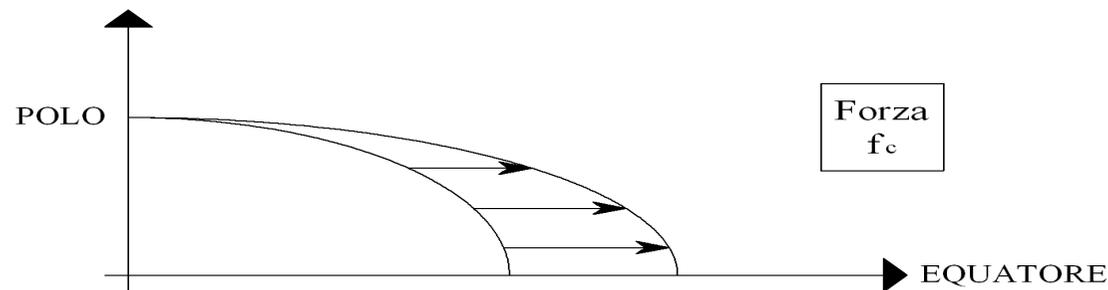


FIG.3



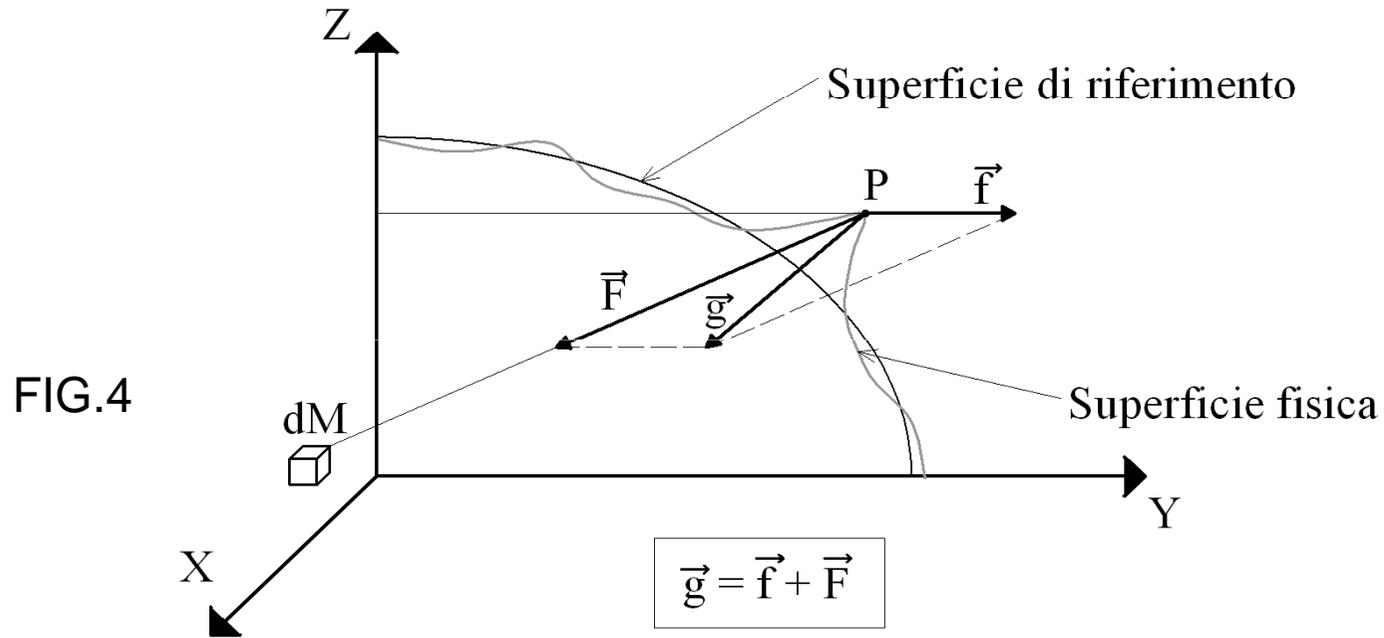
Le due forze (**fc** e **F**) NON sono rappresentate in scala nelle figure a fianco (fig. 3): la forza centrifuga è infatti molto piccola rispetto alla forza di attrazione newtoniana (all'equatore è circa 0,35%)

Forze risultanti

Forze agenti su un generico punto P della Terra:

X, Y → Assi principali d'inerzia

Z → Asse polare ≡ Asse permanente di rotazione ≡ Asse principale d'inerzia ≡ Asse baricentrico



NB: la forza è espressa come accelerazione

g_p	ai poli	vale 9,832166	$m \cdot s^{-2}$
g_e	all'equatore	vale 9,78	$m \cdot s^{-2}$
g	a 45° latitudine	vale 9,80665	$m \cdot s^{-2}$

Forze di gravità g

La gravità costituisce un campo di forze conservativo: le linee di forza prendono il nome di VERTICALI e le loro TANGENTI definiscono le direzioni delle VERTICALI nei punti di tangenza

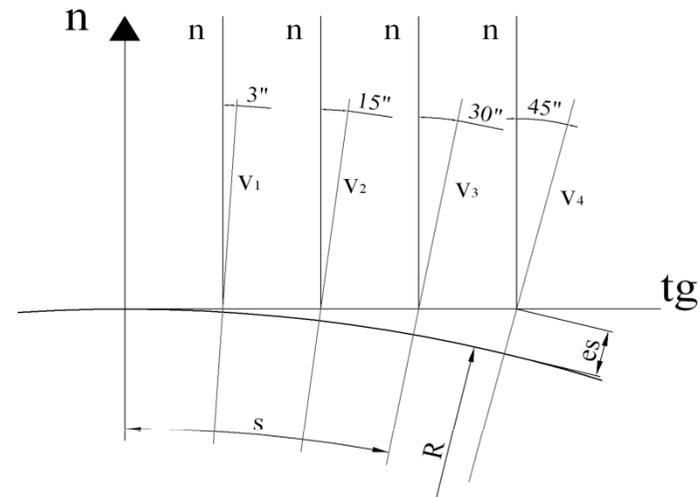
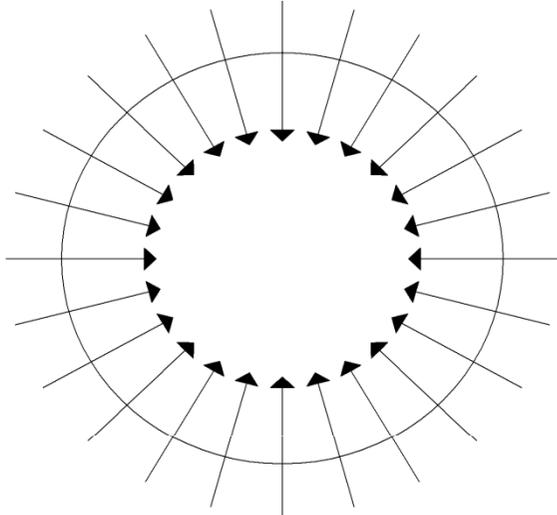


FIG.5

Un filo a piombo, ad esempio, materializza la direzione delle linee di forza: due fili a piombo, distanti 100 m, formano tra di loro un angolo di convergenza di circa 3'' (fig.5).

La gravità cambia anche con la quota. Ad esempio, la gravità diminuisce di circa 0,28% tra un punto in basso e l'altro in cima al monte Everest (cioè decresce solamente dell'1% con un aumento di quota di 32 Km)

errore di sfericità

$$e_s \cong \frac{s^2}{2R}$$

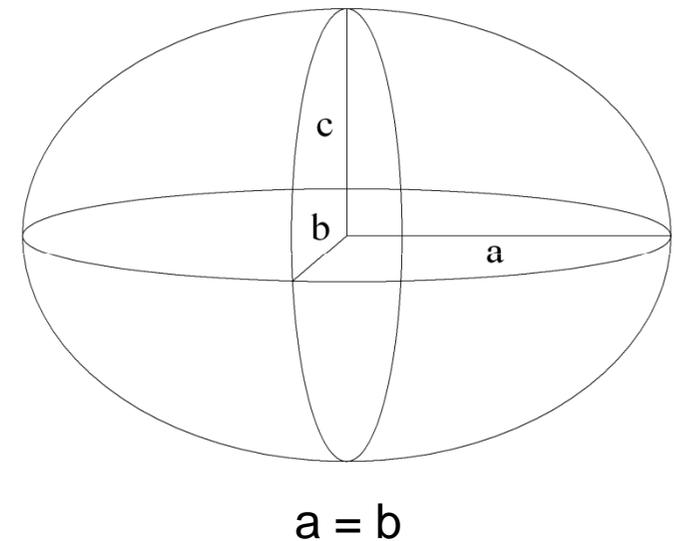
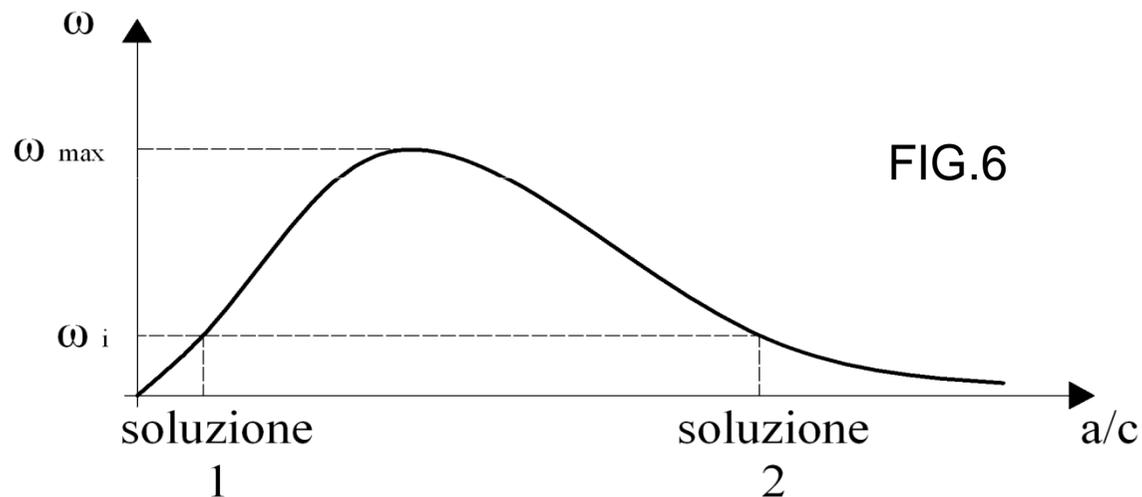
$R \approx 6.376.000 \text{ m}$

Distanza s	100 m	500 m	1000 m	5000 m
errore di sfericità e	1 mm	2 cm	8 cm	196 cm

Analogia dinamica

Qual è la figura di equilibrio di una massa fluida omogenea che è assoggettata soltanto alla forza centrifuga ed alla forza di attrazione newtoniana?

È un ELLISSOIDE di ROTAZIONE, con rapporto a/c dei semiassi legato alla velocità angolare ω , secondo la curva sotto indicata:



Si vede che per ogni ω ci sono due valori del rapporto a/c , ossia si possono avere due ellipsoidi possibili, diversamente schiacciati.

I pianeti del Sistema Solare corrispondono tutti allo schiacciamento minore (prima soluzione); gli ellipsoidi di schiacciamento maggiore appaiono forme di equilibrio instabile.

Per $\omega = 0$ si hanno due valori:

- $a/c = 1 \rightarrow$ SFERA
- $a/c = \infty \rightarrow$ PIANO

Quando ω supera un certo valore ω_{\max} (in relazione alla densità del pianeta) non è possibile alcuna forma di equilibrio: la materia del pianeta tende a spargersi nello spazio (perché ciò succeda per la Terra, la velocità di rotazione dovrebbe diventare almeno 17 volte maggiore dell'attuale).

Esistono altre soluzioni al problema posto: ad esempio la soluzione dell'ellissoide a tre assi (ipotesi Jacobi) o anche la soluzione rappresentata dal pianeta Saturno.

Si riporta l'esempio del Gravimetro IMGC – 02

Si lancia verso l'alto un corpo G e si osserva il suo libero moto di salita e di discesa nell' interno della campana, in cui è stato fatto il vuoto. Lungo la traiettoria del corpo sono stabilite due stazioni, la cui distanza H viene determinata tramite un interferometro, mentre l'intervallo di tempo impiegato nel passare da una stazione all'altra, è misurato da due cronometri elettronici che ricevono i comandi di "start" e "stop" dall'interferometro ottico, ottenendo così T_a e T_b (fig. 7).

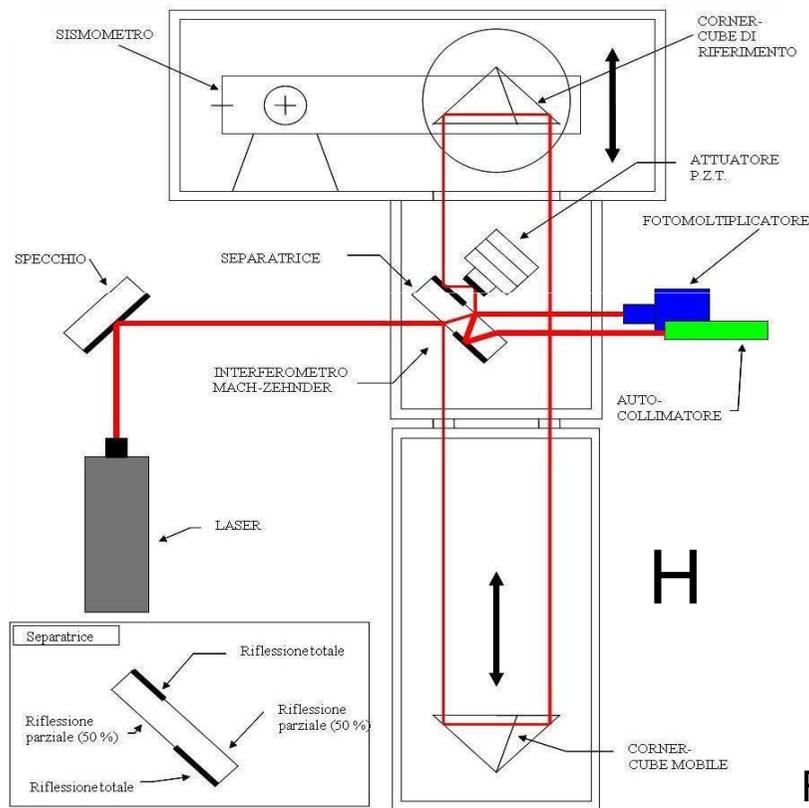


FIG.7

Con questo strumento si ottengono misure di g con incertezza di 10 microgal (il gal è il simbolo di unità di misura di gravità, pari ad 1 cm s^{-2}). E' una MISURA ASSOLUTA. (di solito gravimetri e pendoli misurano differenze di gravità).

$$g = \frac{8H}{(T_b^2 - T_a^2)}$$

Espressione matematica della superficie di riferimento

Si introduce una terna cartesiana ortogonale X, Y, Z :

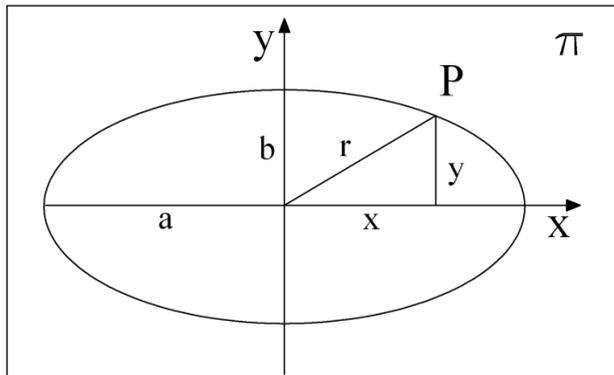
- come asse Z si assume l'asse polare, asse permanente di rotazione del corpo rigido, asse principale d'inerzia e, come tale, asse baricentrico;
- come assi X e Y si assumono due rette passanti per O (baricentro) , perpendicolari tra loro ed a Z : è opportuno scegliere gli altri assi principali d' inerzia .

Si prendano in esame due punti :

P sulla superficie fisica della Terra, di massa $m=1$

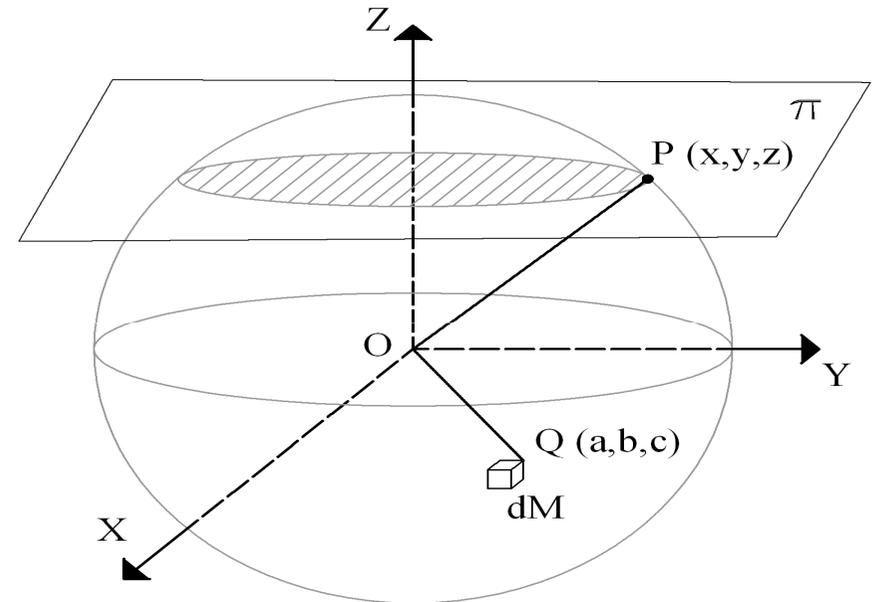
Q centro di massa dM , all'interno della Terra

$$dF = G \frac{dM}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$



$$f = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

FIG.8



Assi di inerzia: sono tre e si dicono “assi liberi”: formano un sistema di assi coordinati ortogonali, in modo che i momenti centrifughi, rispetto ai piani coordinati, siano nulli.

Il punto P deve essere un pò fuori della superficie di riferimento per potere fare un certo sviluppo in serie.

I campi definiti da queste “forze” sono conservativi , cioè ammettono un “potenziale”.
 Anche il campo risultante dalla somma dei due campi è conservativo ed ammette un potenziale.

Definiamo :

• il potenziale di dF \Rightarrow
$$dV = G \frac{dM}{\left[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = G \frac{dM}{r}$$

• il potenziale di f \Rightarrow
$$v = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

Per i potenziali (che sono funzioni scalari) vale la proprietà additiva :

$$V = G \iiint_{V_T} \frac{\delta \cdot da \cdot db \cdot dc}{1}$$

$\delta = 5,52 \text{ g/cm}^3$ è la densità media della Terra; la $\bar{\delta}$ in superficie = $2,67 \text{ g/cm}^3$.

Il potenziale della gravità g vale

$$W = V(x, y, z) + v(x, y)$$

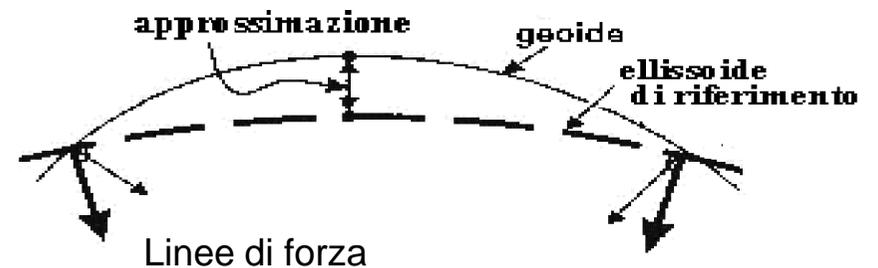
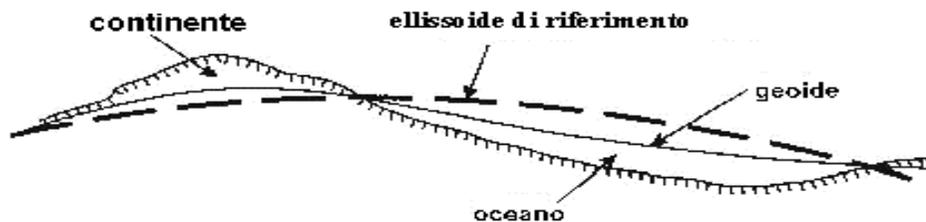
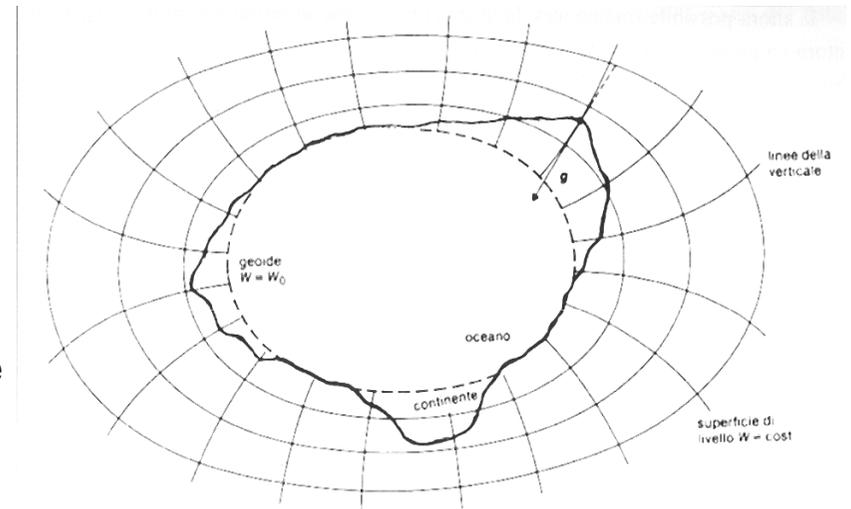
Ponendo $W = \text{costante}$ si trova l'equazione cartesiana di una famiglia di superfici equipotenziali, dette **SUPERFICI** di LIVELLO o **GEOIDI**. (fig. 9)

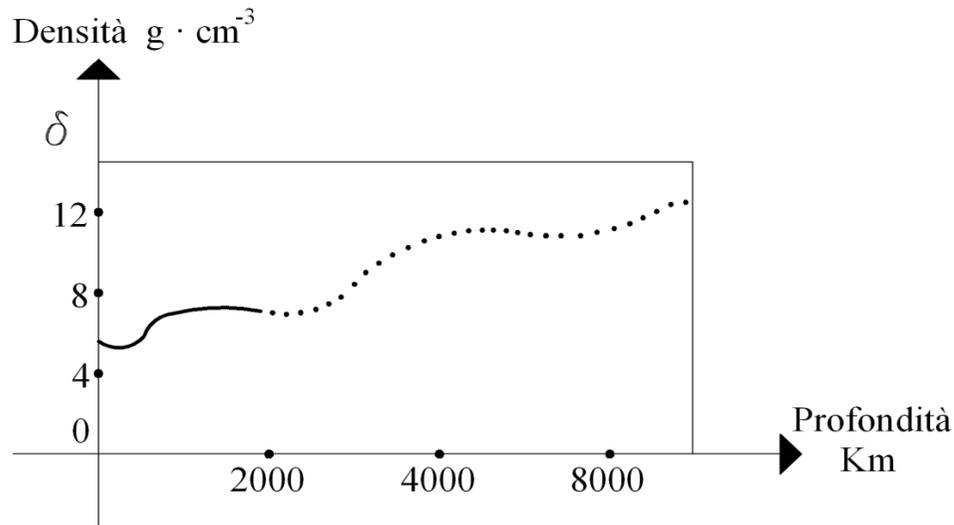
Il geode, anche se ha una forma più regolare rispetto alla superficie topografica (fisica) della Terra, risulta essere una superficie ancora troppo complessa per l'esecuzione di molti calcoli geodetici.

FIG 9.

Rappresentazione di: LINEE di FORZA E
SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

(Una superficie equipotenziale o di livello, è fisicamente rappresentabile da quella di un liquido in perfetta quiete).





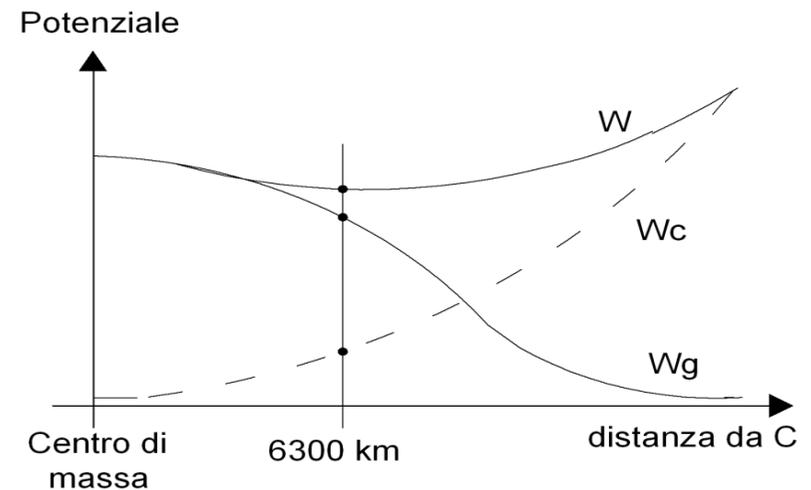
VARIAZIONE DELLA DENSITA' δ (o "massa specifica")
in funzione della PROFONDITA' all'interno della TERRA

W_g = potenziale della forza gravitazionale
 W_c = potenziale della forza centrifuga

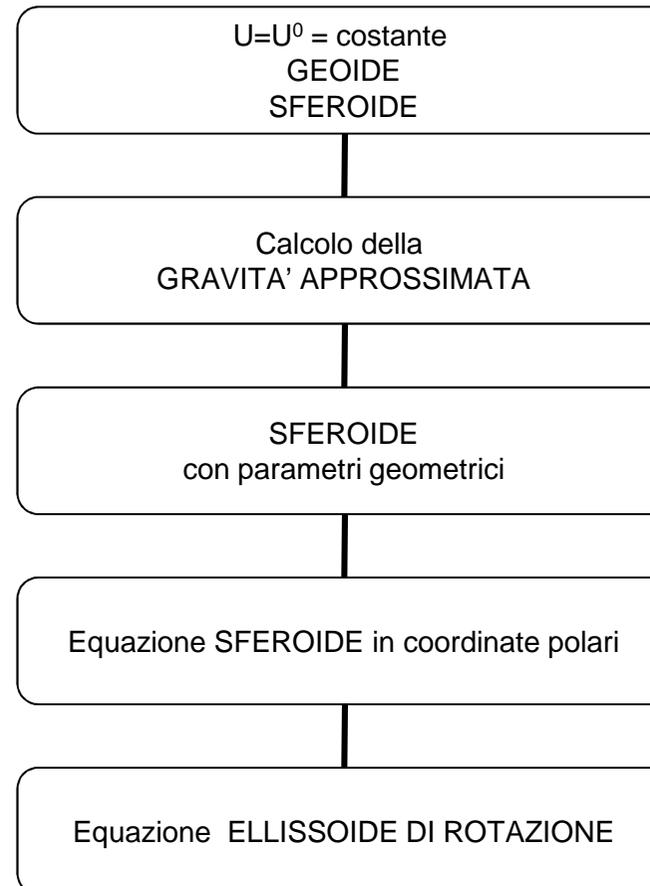
$$W = W_g + W_c$$

Il **peso** è la forza che il campo di gravitazione esercita su tutti i corpi materiali in prossimità della Terra. Uno stesso corpo ha ai poli un peso maggiore che all'equatore.

FIG.10



GEODESIA (ric.2)



Espressione matematica della superficie di riferimento

Possiamo tentare di trovare un' espressione approssimata sia di V che di W . Procediamo ad un cambio di coordinate: da cartesiane a polari.

Si ha per il Teorema di Carnot (fig.11):

$$l^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos \theta$$

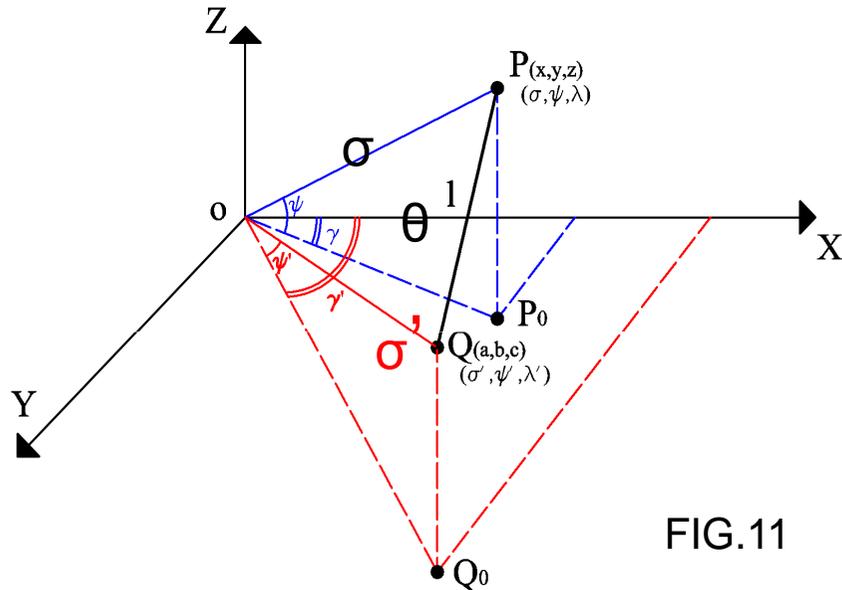


FIG.11

Quindi il potenziale V è:

$$P = \begin{cases} x = \sigma \cos \psi \cos \lambda \\ y = \sigma \cos \psi \sin \lambda \\ z = \sigma \sin \psi \end{cases} \quad Q = \begin{cases} a = \sigma' \cos \psi' \cos \lambda' \\ b = \sigma' \cos \psi' \sin \lambda' \\ c = \sigma' \sin \psi' \end{cases}$$

$$(PQ)^2 = l^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma'[\sin \psi \sin \psi' + \cos \psi \cos \psi' \cos (\lambda - \lambda')]$$

e cioè

$$\cos \theta = \sin \psi \sin \psi' + \cos \psi \cos \psi' \cos (\lambda - \lambda')$$

$$da \cdot db \cdot dc = \sigma'^2 \cos \psi' \cdot d\psi' \cdot d\lambda' \cdot d\sigma'$$

$$V = \frac{G}{\sigma} \iiint \frac{\delta \cdot \sigma'^2 \cos \psi' \cdot d\psi' \cdot d\lambda' \cdot d\sigma'}{\left[1 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 - 2 \frac{\sigma'}{\sigma} \cos \vartheta \right]}$$

L'unica difficoltà a procedere è dovuta al fatto che non si conosce la legge di distribuzione della densità δ . Ma ricordiamo che vale la seguente equazione differenziale

$$\Delta V = \text{laplaciano di } V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Cioè V è una funzione armonica nello spazio esterno della Terra: ciò vuole anche significare che quella funzione è sicuramente sviluppabile in serie convergente.

All'interno della Terra, V segue invece la legge di Poisson.

Uno sviluppo conveniente è quello in serie delle cosiddette "funzioni sferiche" di FOURIER. Lo sviluppo può mettersi sotto diverse forme tra cui la seguente :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[A_{nm} \frac{R_{nm}(\psi, \lambda)}{\sigma^{n+1}} + B_{nm} \frac{S_{nm}(\psi, \lambda)}{\sigma^{n+1}} \right] \quad m \leq n$$

R_{nm} e S_{nm} sono le funzioni sferiche, di cui si riportano alcuni dei termini primi:

$$R_{00} = 1 \quad R_{10} = \sin\psi \quad R_{11} = \cos\psi \cos\lambda \quad S_{00} = 0 \quad S_{10} = 0 \quad S_{11} = \cos\psi \sin\lambda$$

$$R_{20} = 3/2 (\sin \psi)^2 - 1/2$$

$$R_{21} = 3 \cos \psi \sin \psi \cos \lambda$$

$$R_{22} = 3 (\cos \psi)^2 \cos 2\lambda$$

$$S_{20} = 0$$

$$S_{21} = 3 \cos \psi \sin \psi \sin \lambda$$

$$S_{22} = 3 (\cos \psi)^2 \sin 2\lambda$$

I coefficienti $A_{n,m}$ e $B_{n,m}$ valgono:

$$A_{n,m} = 2G \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint \sigma^n R_{n,m}(\psi, \lambda) dM$$

$$B_{n,m} = 2G \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint \sigma^n S_{n,m}(\psi, \lambda) dM$$

Diamo alcuni valori: $A_{00}=GM$ $B_{00}=0$ $B_{10}=0$

A_{10}, A_{11}, B_{11} rappresentano (a parte G) i MOMENTI STATICI della Terra rispetto all'origine. Essendo l'origine il baricentro, sono nulli.

A_{21}, B_{21}, B_{22} , sono proporzionali ai MOMENTI CENTRIFUGHI, sono nulli rispetto ai piani XY, XZ, YZ.

$$A_{20} = G \left(\frac{A+B}{2} - C \right)$$

$$A_{22} = \frac{1}{4} G (B - A)$$

A,B,C essendo i momenti d'inerzia rispetto a X,Y, Z

In definitiva, l'equazione di V si può scrivere: (espressione limitata ai termini del 3° ordine)

$$V = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 2(\sin \psi)^2) + \frac{3}{4\sigma^2} \frac{B-A}{M} (\cos \psi)^2 \cos 2\lambda \right] + T \frac{1}{\sigma^4}$$

Si ricorda che : il **momento statico** è un prodotto (scalare o vettoriale) tra una lunghezza ed un'altra quantità (lunghezza, area, volume, forza, impulso...). I momenti di 1° grado contengono una sola lunghezza, quelli di 2° grado due fattori di lunghezza. I **momenti centrifughi** sono momenti d'inerzia, prodotti di distanze da due piani per una quantità.

Si riportano alcuni calcoli di *momenti*, come esempio:

distanza di P dal piano [XY]: $\overline{PP_0} = \sigma \sin \psi$

distanza di P dal piano [ZY]:

$$\overline{P_0P_y} = \sigma \cos \psi \sin \lambda$$

distanza di P dal piano [XZ]:

$$\overline{P_0P_x} = \sigma \cos \psi \cos \lambda$$

Queste quantità, moltiplicate per dM ,
danno i **dMomentiStatici** rispetto ai piani indicati.

Gli integrali dei **dMS** estesi a tutto il volume V sono pari a 0,
poiché i piani [XY], [ZY] e [ZX] passano, per nostra costruzione,
nel baricentro della Terra e quindi:

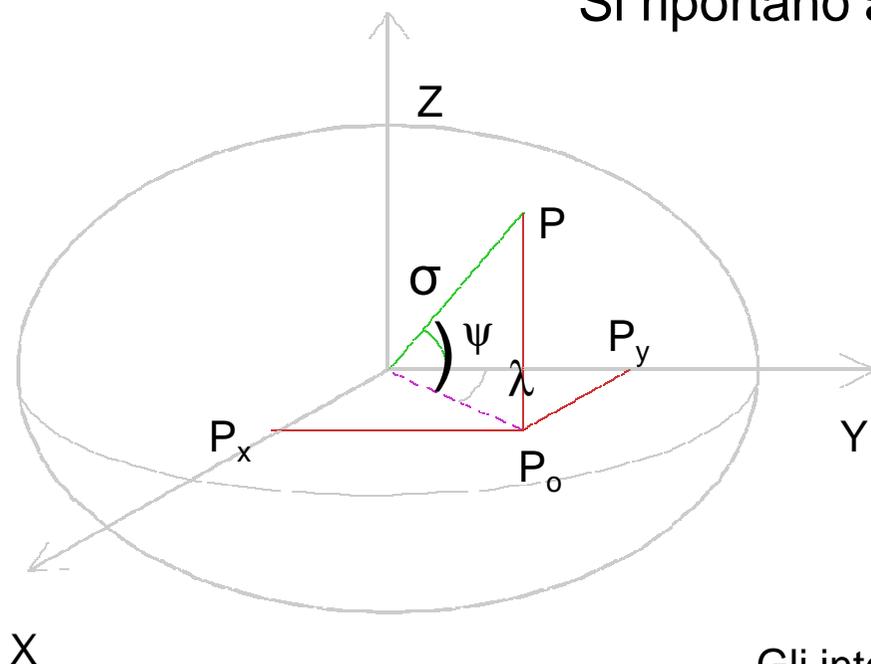
$$\mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_{11} = \mathbf{B}_{10} = \mathbf{0}$$

Il prodotto delle distanze di P dai vari piani vale:

$$PP_0 \cdot P_0P_y = \sigma \sin \psi \cdot \sigma \cos \psi \cdot \sin \lambda = \sigma^2 \sin \psi \sin \lambda \cos \psi$$

$$PP_0 \cdot P_0P_x = \sigma \sin \psi \cdot \sigma \cos \psi \cdot \cos \lambda = \sigma^2 \sin \psi \cos \lambda \cos \psi$$

$$P_0P_x \cdot P_0P_y = \sigma \sin \psi \cos \lambda \cdot \sigma \sin \psi \cdot \sin \lambda = \sigma^2 \sin^2 \psi \sin \lambda \cos \lambda$$



Calcoliamo i **MOMENTI CENTRIFUGHI**:

$$dA_{21} = \sigma^2 \sin \psi \cos \psi \cos \lambda \cdot dM \quad [XY][XZ]$$

$$dB_{21} = \sigma'^2 \sin \psi \cos \psi \sin \lambda \cdot dM \quad [XY][YZ]$$

$$dB_{22} = \sigma'^2 \cos^2 \psi \frac{1}{2} \cos \lambda \sin \lambda \cdot dM \quad [XZ][YZ]$$

Questi momenti possono essere correlati alle rispettive rotazioni intorno agli assi X, Y e Z. Essendo, per nostra approssimazione, la Terra un corpo a simmetria centrale con centro coincidente con il baricentro, si ottiene:

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{0}$$

In base alle considerazioni viste finora, la funzione sferica di Fourier si riduce a:

$$A_{00} \frac{R_{00}}{\sigma} + A_{20} \frac{R_{20}}{\sigma^3} + A_{22} \frac{R_{22}}{\sigma^3} + T \left(\frac{1}{\sigma^4} \right) \quad \text{ecc.}$$

L'equazione del GEOIDE richiede di considerare anche i termini superiori al 3° ordine nell'espressione di V e cioè $T(1/\sigma^4)$.

Se si vuole la determinazione di una superficie di riferimento meno rigorosa:

- si fa a meno dei termini superiori al 3° ordine
- si pone $A = B$ (la figura della Terra si avvicina molto a quella del solido di rotazione)

L'espressione approssimata di V^I è allora:

$$V^I = \frac{G \cdot M}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{C - A}{M} \right) \cdot (1 - 3\sin^2 \psi) \right] \quad \text{POTENZIALE NORMALE}$$

E l'espressione approssimata del POTENZIALE COMPLESSIVO diventa:

$$U = V^I + v = \frac{G \cdot M}{\sigma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left(\frac{C - A}{M} \right) \cdot (1 - 3\sin^2 \psi) \right] + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sigma^2 \cdot \cos^2 \psi$$

Se si pone $U = U_0 = \text{cost.}$ si ha l'equazione di una famiglia di superfici equipotenziali della gravità, dette **SFEROIDI** (di BRUNS).

(Ricordiamo che le SUPERFICI EQUIGRAVITAZIONALI sono un po' diverse dalle SUPERFICI EQUIPOTENZIALI della GRAVITA').

Gli “sferoidi” sono delle superfici di rotazione (nell’equazione scompare l’angolo λ)
 A e C sono momenti d’inerzia equatoriale e polare.
 Le “normali” a queste superfici hanno direzione sufficientemente prossima alle VERTICALI

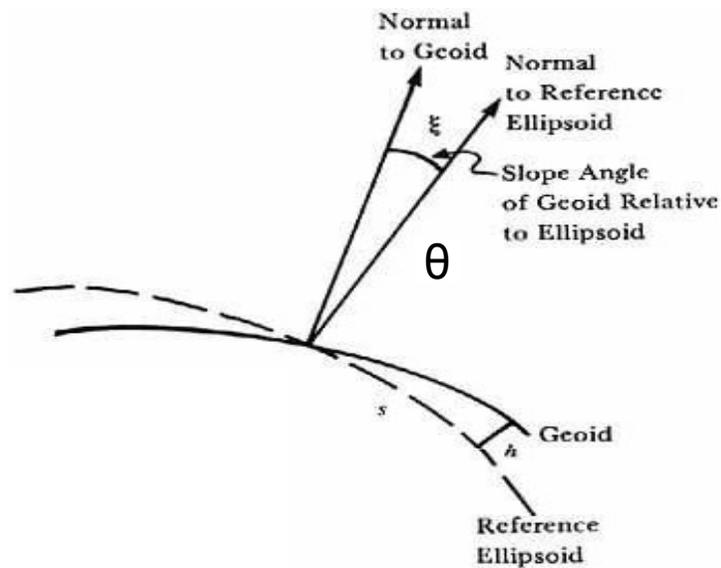
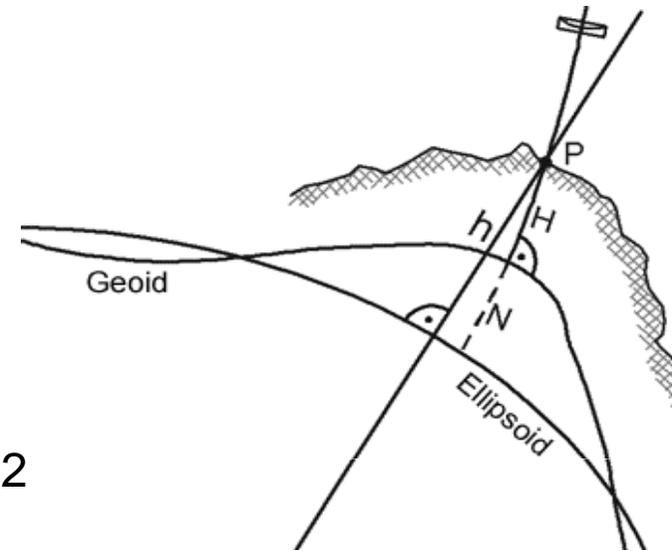


FIG.12



θ = **DEVIAZIONE** della VERTICALE (dell’ordine di qualche secondo sessagesimale). La massima deviazione è di circa $60''$, mentre valori di $10''$ si verificano in zone anomale (in prossimità dei grandi massicci montani o di forti variazioni di densità della crosta. Gli scostamenti sono in ogni modo accidentati o locali).

Attenzione alle influenze che la deviazione può avere sia nella misura di angoli azimutali che nelle misure di dislivelli (ad es. nella livellazione trigonometrica).

Determinazione della gravità approssimata

Si è visto che

$$\pm \text{grad} (W) = g(x, y, z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

Cosa succede se si fa $\text{grad}(U) = ?$

Essendo $U \neq W$, si otterrà un vettore naturalmente diverso da g . Per ottenere il modulo di questo vettore (che indichiamo con γ^*) si dovrebbe derivare la U rispetto alla normale n alla superficie (cioè si dovrebbero eseguire le derivate parziali rispetto a x, y, z e calcolare poi la risultante).

Si dimostra che, nei limiti della nostra approssimazione, si può invece derivare l'espressione di U rispetto a σ .

Si ottiene γ

$$\frac{dU}{d\sigma} = \gamma = \frac{G \cdot M}{\sigma^2} \cdot \left[1 + \frac{3}{2\sigma^2} \cdot \left(\frac{C - A}{M} \right) \cdot (1 - 3 \sin^2 \psi) \right] + \omega^2 \cdot \sigma \cdot \cos^2 \psi$$

$\gamma =$ Gravità Approssimata o NORMALE

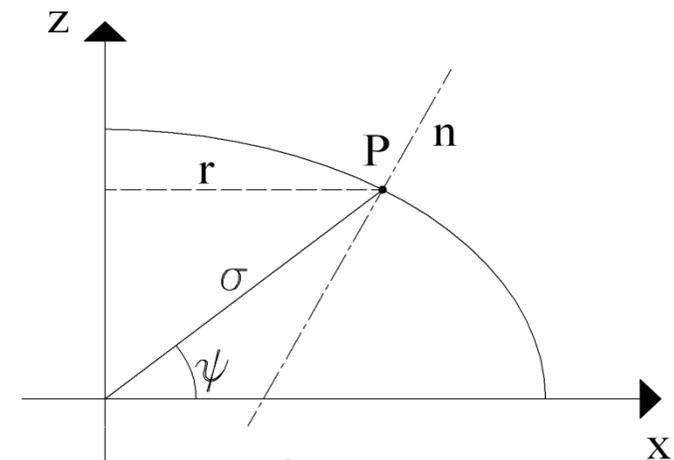


FIG.13

$$r = \sigma \cos \psi$$

In questa equazione compaiono grandezze geometriche (σ, ψ) ma anche grandezze meccaniche ($G \cdot M$, $(C-A)/M$, ω).

Si vedrà di eliminare le costanti meccaniche. Si ricorda che vale:

$$W_{(x,y,z)} - U_{(x,y,z)} = T_{(x,y,z)} \quad \text{POTENZIALE ANOMALO}$$

T è la grandezza fondamentale alla base delle teorie analitiche del campo gravitazionale. Può essere espressa in serie armoniche sferiche di ordine m e grado n nella forma:

$$T = \frac{G \cdot M}{\sigma} \left[1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\sigma} \right)^n \cdot \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi') \cdot \left(\bar{C}_{n,m} \cdot \cos(m \lambda) + \bar{S}_{n,m} \sin(m \lambda) \right) \right]$$

essendo:

$$\begin{aligned} \bar{C}, \bar{S} &= \text{coefficienti gravitazionali normalizzati} \\ \bar{P} &= \text{funzione normalizzata di Legendre} \end{aligned}$$

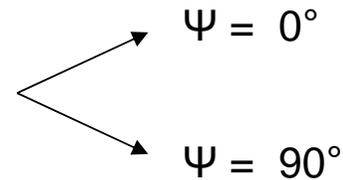
La differenza tra il modulo dei vettori g e γ si chiama “**anomalia di gravità**” Δg

$$\Delta g = g - \gamma$$

L'anomalia di gravità è funzione lineare di $T(P)$

SCHIACCIAMENTO GEOMETRICO e SCHIACCIAMENTO GRAVIMETRICO

1. Scriviamo le espressioni di U per



1/a) per $\Psi = 0^\circ$

$$\begin{aligned}\sin^2 \psi &= 0 \\ \cos^2 \psi &= 1 \\ \sigma &= a\end{aligned}$$

$$U_{\psi=0^\circ} = \frac{G \cdot M}{a} \left[1 + \frac{C-A}{M} \cdot \frac{1}{2 \cdot a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M} \right]$$

1/b) per $\Psi = 90^\circ$

$$\begin{aligned}\sin^2 \psi &= 1 \\ \cos^2 \psi &= 0 \\ \sigma &= c\end{aligned}$$

$$U_{\psi=90^\circ} = \frac{G \cdot M}{c} \cdot \left[1 - \frac{C-A}{M} \cdot \frac{1}{c^2} \right]$$

E siccome $U_{\psi=0^\circ} = U_{\psi=90^\circ}$ si ha

$$\frac{G \cdot M}{a} \cdot \left[1 + \frac{k}{2 \cdot a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M} \right] = \frac{G \cdot M}{c} \cdot \left[1 - \frac{k}{c^2} \right] \quad \text{essendo} \quad k = \frac{C-A}{M}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{G \cdot M}{G \cdot M} \cdot \left[1 - \frac{k}{c^2} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{2 \cdot a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M} \right) \right]^{-1}$$

Facendo uno sviluppo in serie e arrendoci ai termini lineari:

$$\frac{c}{a} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a^2} - \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M} + k \cdot \frac{\omega^2 \cdot a}{2 \cdot G \cdot M}$$

trascurabile

$$1 - \frac{c}{a} = \frac{a - c}{a} = \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M}$$

α si chiama "schiacciamento geometrico della superficie $U = U_0$ "

2. Scriviamo le espressioni di γ per $\Psi = 0^\circ$
 $\Psi = 90^\circ$

2/a) per $\psi = 0^\circ$

$$\gamma_{\text{equat}} = \frac{G \cdot M}{a^2} \left[1 + \frac{3k}{2 \cdot a^2} - \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M} \right]$$

2/b) per $\psi = 90^\circ$

$$\gamma_{\text{polo}} = \frac{G \cdot M}{c^2} \cdot \left[1 - \frac{3k}{c^2} \right]$$

$$\frac{\gamma_p}{\gamma_e} = \frac{a^2}{c^2} \left(1 - \frac{3k}{c^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{3k}{2a^2} - \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M} \right)^{-1}$$

Sviluppando in serie fino ai termini di primo ordine:

$$\frac{\gamma_p}{\gamma_e} = 1 - \frac{3k}{2a^2} + 2 \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M} \quad \frac{\gamma_p}{\gamma_e} - 1 = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \beta = -\frac{3k}{2a^2} + 2 \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M}$$

β = si chiama "schiacciamento gravimetrico"

RELAZIONE di CLAIRAUT

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a^2} + \frac{\omega^2 \cdot a^3}{2 \cdot G \cdot M} - \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{a^2} + 2 \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot a^3}{G \cdot M}$$

$$\alpha \cong \frac{1}{300} \qquad \beta \cong \frac{1}{150}$$

se poniamo al 2° membro $\frac{G \cdot M}{a^2} = \gamma_e$

si può scrivere

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot a}{\gamma_e}$$

cioè la somma dello schiacciamento α geometrico (costante) e dello schiacciamento β gravimetrico (costante) è uguale a 5/2 del rapporto tra la forza centrifuga $\omega^2 \cdot a$ e la gravità γ_e , entrambe calcolate all'equatore.

ALCUNI VALORI: $GM = 3,986005 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ $\left[\text{IAG 1980} \right]$
 $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Equazione dello SFEROIDE in COORDINATE POLARI

$$\frac{U}{U_{\psi=0^\circ}} = \frac{\frac{GM}{\sigma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2} \frac{C-A}{M} \cdot (1 - 3\text{sen}^2\psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2 \cos^2\psi}{\frac{GM}{a} \cdot \left[1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right]} = 1$$

$$\frac{\sigma}{a} = \left[1 + \frac{K}{2\sigma^2} \cdot (1 - 3\text{sen}^2\psi) + \frac{\omega^2 \sigma^3 \cos^2\psi}{2GM} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right) \right]^{-1}$$

$$\sigma = a \cdot \left[1 - \left(\frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right) \cdot \text{sen}^2\psi \right]$$

$$\sigma = a \cdot \left(1 - \alpha \cdot \text{sen}^2\psi \right)$$

a = semiasse equatoriale

α = coefficiente di schiacciamento geometrico

ψ = angolo tra raggio vettore σ e piano equatoriale

Espressione della GRAVITA' APPROSSIMATA

Analogamente a quanto visto per lo sferoide, si scrive il rapporto γ/γ_e :

$$\frac{\gamma}{\gamma_e} = \dots$$

da cui si ricava:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \psi)$$

Per le immediate vicinanze all'ellissoide (h piccolo) si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \gamma - (\delta + \delta' \text{sen}^2 \varphi) \cdot h + \delta'' h^2 = \\ &= \gamma - (0,30877 - 0,00045 \text{sen}^2 \varphi) \cdot h + 0,000072 \cdot h^2 \end{aligned}$$

essendo
$$\gamma = 978033 \cdot (1 + 0,0053166 \cdot \text{sen}^2 \varphi - 0,0000059 \cdot \text{sen}^2 2\varphi)$$

con h espresso in km, mentre δ , δ' e δ'' sono coefficienti, sopra indicati.

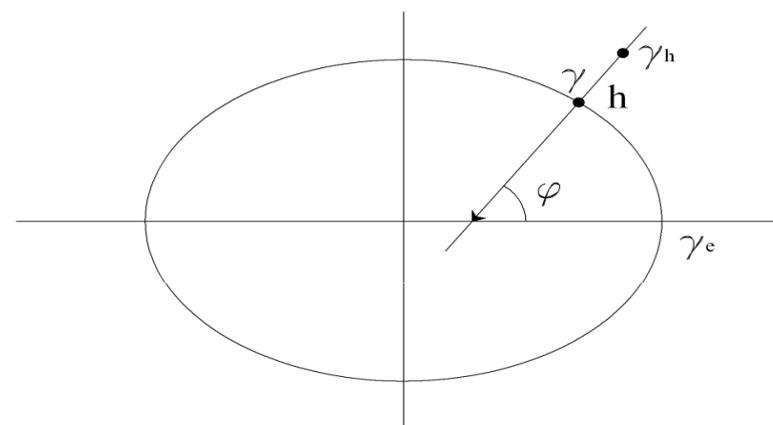


FIG.14

PASSAGGIO da SFEROIDE ad ELLISSOIDE

Lo “*sferoide*” è molto simile ad un “*ellissoide di rotazione*” che abbia gli stessi assi **a** e **c**.

Le due superfici coincidono a meno di termini in α^2 .

Infatti

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{c^2}{a^2}} = a^2$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1 - \alpha)^2} = a^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \cdot (1 - 2\alpha^{-1}) = a^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \cdot (1 + 2\alpha) = a^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 - 2\alpha \cdot Z^2$$

$$\sigma^2 = a^2 \cdot \left(1 - 2\alpha \cdot \frac{Z^2}{a^2} \right)$$

$$\sigma^2 = a^2 \cdot (1 - 2\alpha \cdot \sin^2 \psi)$$

$$\sigma^2 = a^2 \cdot (1 - 2\alpha \cdot \sin^2 \psi)^{1/2}$$

ma

$$\frac{c^2}{a^2} = (1 - \alpha)^2$$

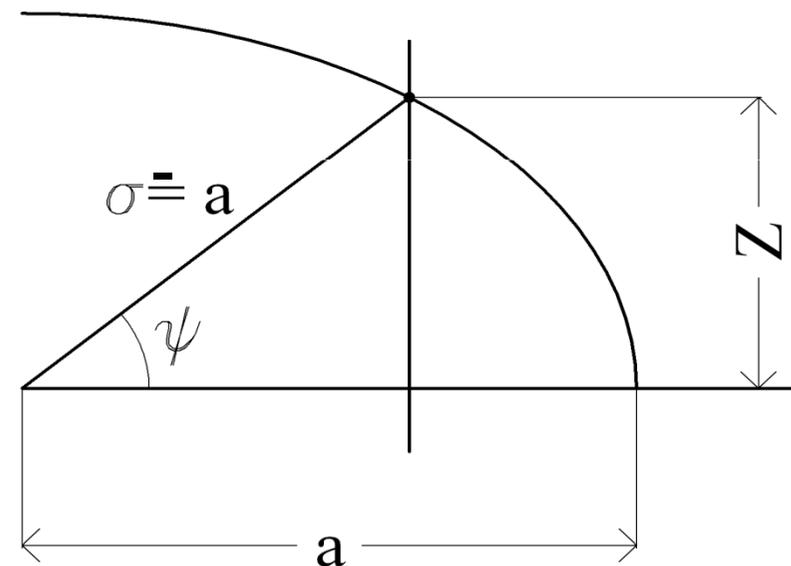


FIG.15

da cui si ricava:

$$\sigma = a \cdot (1 - \alpha \cdot \sin^2 \psi)$$

Quindi nel sostituire l'ellissoide allo sferoide, si commette un errore massimo, nel valutare i raggi vettori, dell'ordine di $\approx (1/90000) \sigma$

Dalle nostre parti (latitudine $\approx 45^\circ$) l'errore è di ≈ 25 m.

Il più recente valore di α , ottenuto da informazioni fornite da satelliti, è:

$$\alpha = \frac{1}{289.25 \pm 0.03} = 0.0033529 \pm 0.0000003$$

Il **raggio equatoriale** varrebbe: 6378,16 \pm 0,15 Km

Il **raggio polare** varrebbe: 6356,77 \pm 0,15 Km

$$\Delta = 21,39 \quad \text{Km}$$

(da lontano la Terra è vista come una sfera)

Sviluppo in serie di armoniche sferiche (di LAPLACE)

Un altro modo di affrontare il problema è il seguente:

$$W = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_2^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n X_n(\sin \psi) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi$$

Essendo:

- **W** = potenziale di gravità terrestre, in un punto di latitudine geocentrica ψ a distanza r dal centro;
- **GM** = costante gravitazionale geocentrica (G costante di gravitazione universale, M massa terrestre, includente l'atmosfera);
- **a** = semiasse equatoriale;
- **$X_n(\sin \psi)$** = armonica zonale di grado n° , funzione di $\sin \psi$;
- **J** = il suo coefficiente numerico;
- **ω** = velocità angolare di rotazione.

La superficie sferoidica viene suddivisa in riquadri (tessere), tanto più numerosi e minuti, quanto maggiore è l'approssimazione desiderata.

In ciascun riquadro, la superficie media è rappresentata dal valore che assume una particolare funzione, sommatoria di una serie di termini. Queste funzioni sono dette "*funzioni sferiche di Laplace*"

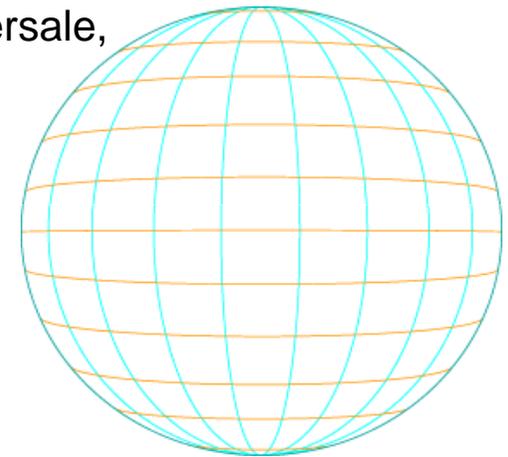


FIG.16

Per definire il sistema di riferimento geodetico (U.A.I. 1964) si utilizzano:

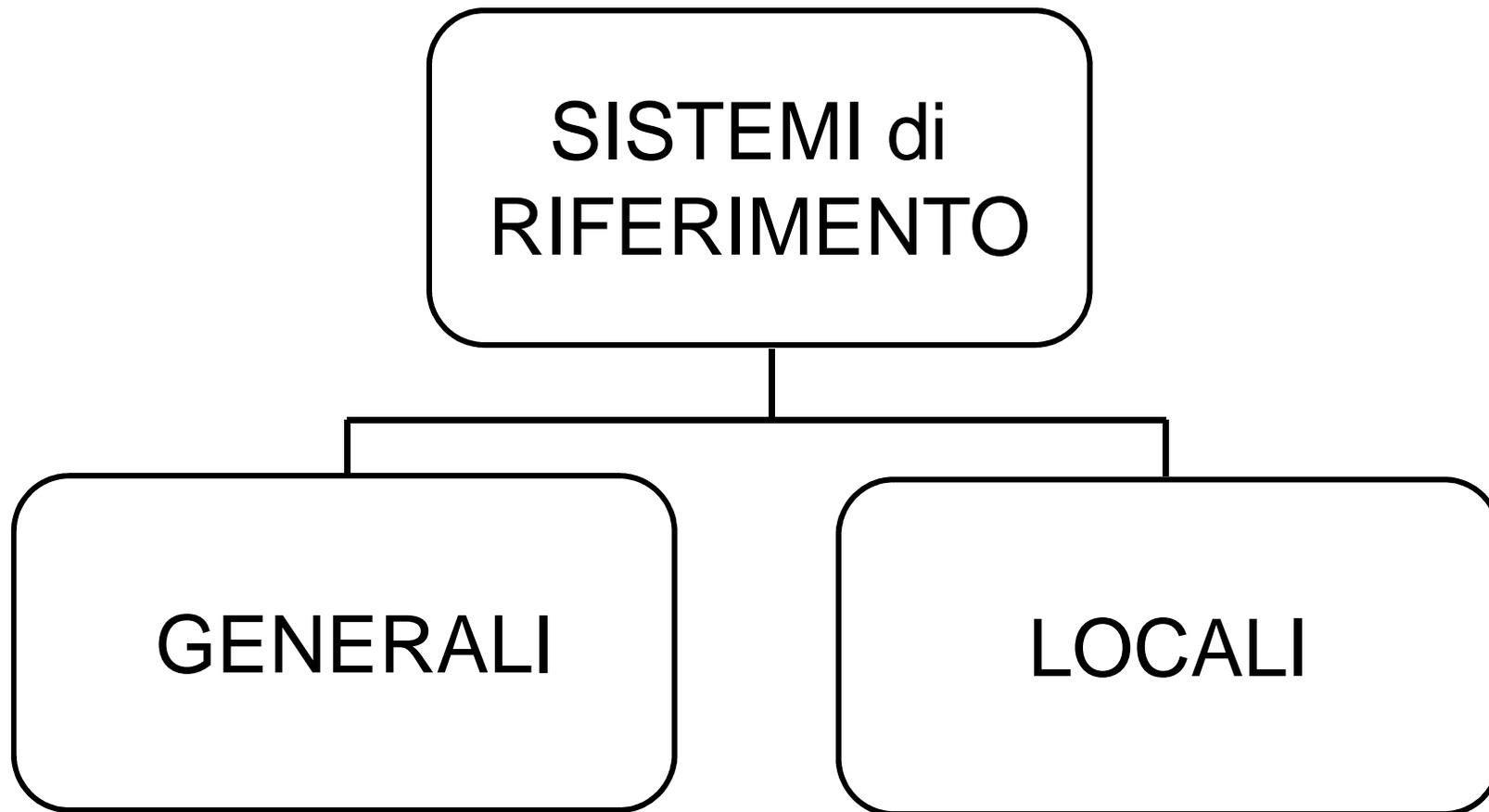
- $a = 6.378.160 \text{ m}$
- $GM = 398.603 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- $J_2 = 0,0010827$

J_2 è il coefficiente della prima armonica zonale, il primo e più rilevante termine dello sviluppo, legato al valore dello schiacciamento geometrico α .

Il potenziale **U** è univocamente determinato dalla superficie ellissoidica, dalla massa racchiusa **M** e dalla velocità angolare ω (in accordo al teorema di STOKES-POINCARÉ'), indipendentemente dalla distribuzione interna della densità δ .

La teoria dell'ellissoide equipotenziiale è stata sviluppata da Pizzetti (1894) e successivamente elaborata da Somigliana (1929).

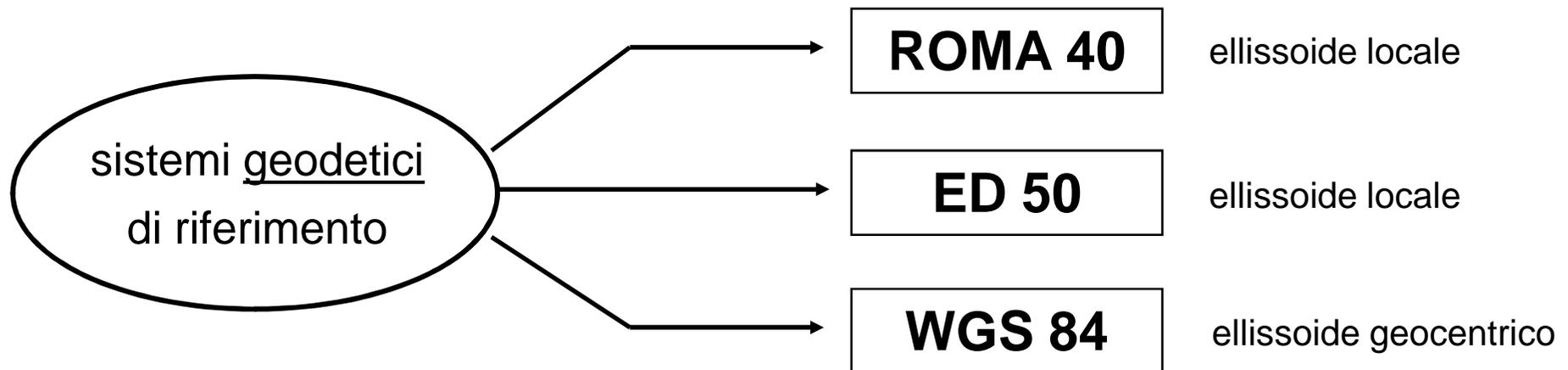
GEODESIA (*ric.3*)



SISTEMI di RIFERIMENTO

superfici e parametri di posizione

SISTEMI GEODETICI



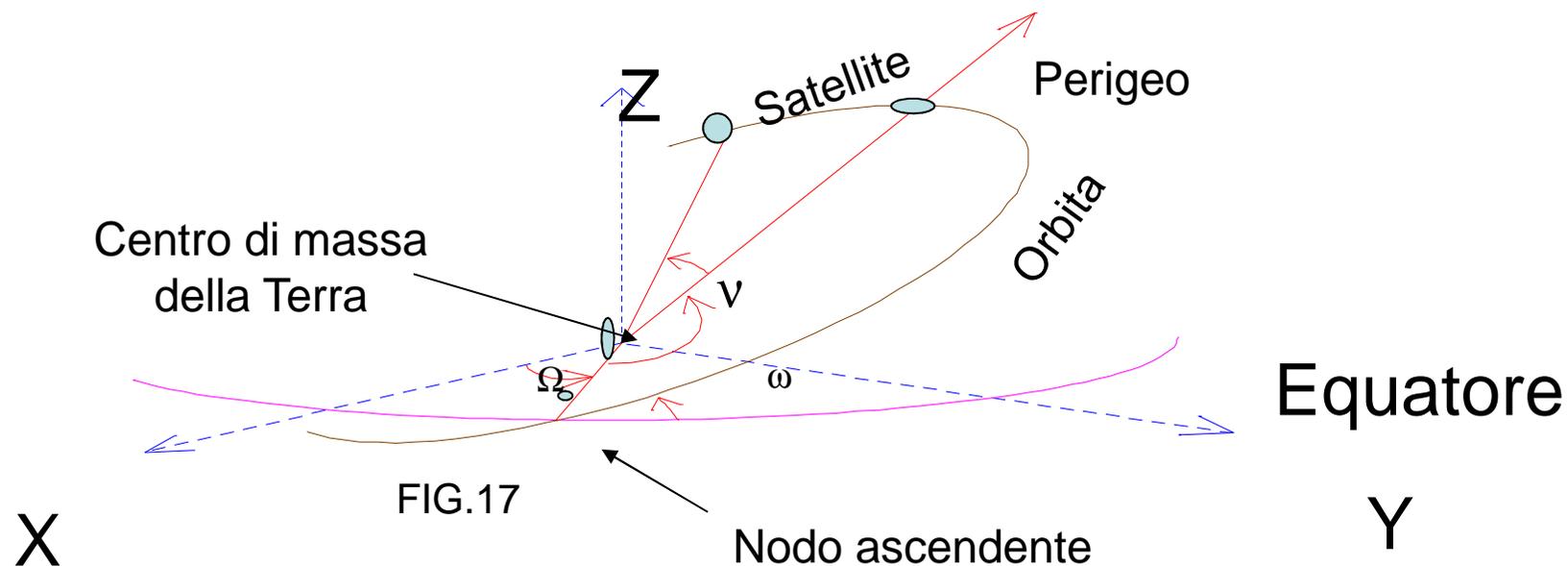
ALCUNI RECENTI SISTEMI

- **Sistemi E.C.E.F. (earth-centered, earth-fixed)**
(definiti dal Dipartimento Difesa americano) → ad es. **WGS**
- **Sistemi I.T.R.S. (IERS Terrestrial Reference System)**
(definito dal Servizio Internazionale per la rotazione terrestre IERS):
è un sistema di riferimento convenzionale, con realizzazione annuale denominata **ITRF (IERS Terrestrial Reference Frame)**.
- **Sistemi E.U.R.E.F. (European Reference Frame)**
è la realizzazione del Sistema di Riferimento Europeo: ha definito un sistema denominato **ETRS (European Terrestrial Reference System)** con realizzazione annuale denominata **ETRF (European Terrestrial Reference Frame)**.

Con l'avvento del GPS ed in generale con lo sviluppo delle principali tecniche spaziali (Laser Ranging, Doppler, GPS, Tecniche Inerziali, ecc.), si passa da una visione quasi statica della Topografia ad una visione dinamica (la Terra si muove e la sua forma cambia per fenomeni sia periodici – quali le maree, ecc. – che per fenomeni irreversibili – quali la subsidenza, la geodinamica, ecc.).

Con l'utilizzo dei sistemi GNSS (Global Navigation Satellite System), occorre introdurre un concetto nuovo di SISTEMA di RIFERIMENTO (SR) per poter comprendere e definire il metodo del "*posizionamento tridimensionale di punti mediante strumenti, metodi e servizi del GNSS*"

SISTEMA GEOCENTRICO INERZIALE (Earth Centered Inertial – ECI)



Assi del sistema: X, Y, Z

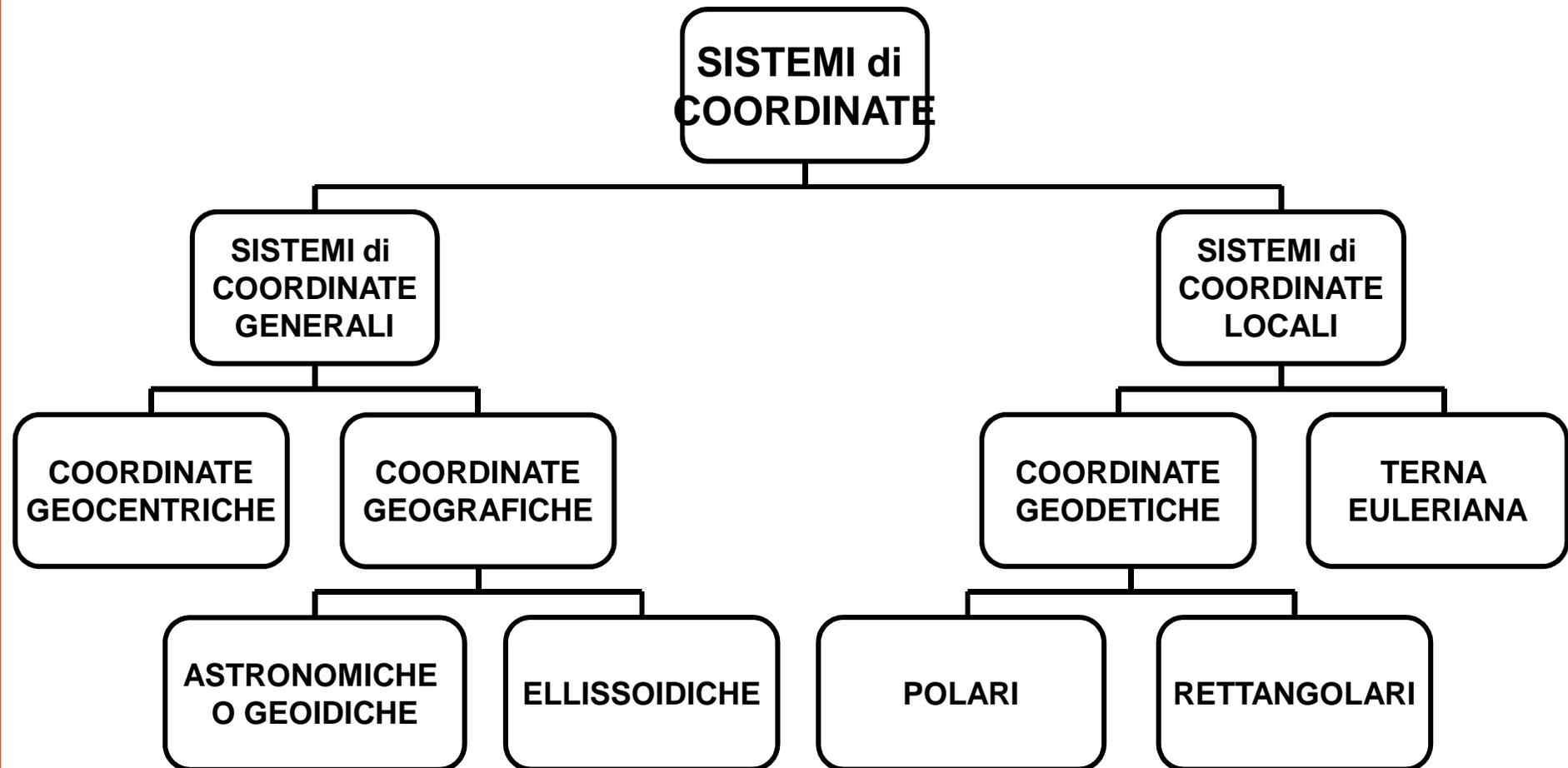
Origine: nel centro di massa della Terra

Asse X: orientato verso l'equinozio di primavera ad una certa epoca
(J2000 - 1° gennaio 2000 ore 12 UT)

Asse Z: orientato verso il Polo Nord Celeste, alla stessa epoca

Asse Y: forma la terna destrorsa con gli assi X e Z

RIC.4



SUPERFICI

SUPERFICIE EFFETTIVA della TERRA (superficie FISICA)

SUPERFICIE di RIFERIMENTO

DINAMICA REALE: particolare superficie di livello del campo “effettivo” della gravità terrestre, coincidente con il pelo libero dei mari, supposti in equilibrio ed in assenza di azioni perturbatrici (**GEOIDE**) *.

DINAMICA TEORICA: particolare superficie di livello del campo “teorico” della gravità (**SFEROIDE**).

DINAMICA GEOMETRICA

ELLISSOIDE locale o geocentrico

SFERA OSCULATRICE

PIANO TANGENTE

* Le **misure topografiche** di direzioni azimutali e di angoli zenitali, con teodoliti, fanno riferimento al campo reale della gravità W essendo l'asse primario dello strumento orientato secondo la direzione della verticale al punto.

Per definire l'ellissoide terrestre occorre fissare:

- posizione del **centro O** (3 parametri o coordinate)
- direzione dell'**asse minore** (verso il polo boreale o polo nord)
- lunghezza del **raggio equatoriale a**
- **schacciamento α** oppure **eccentricità e^2**

Le sole misure geometriche non possono risolvere soddisfacentemente il problema, specialmente nei riguardi dello schacciamento. Si è fatto ricorso alle misure di gravità: la combinazione del metodo geometrico con quello gravimetrico ha dato i migliori risultati, sino a pochi anni or sono. Recentemente, un potente mezzo di indagine è stato introdotto mediante l'osservazione delle orbite dei satelliti artificiali (le orbite sono funzione della velocità iniziale del satellite e del campo di gravità).

Alcuni parametri dei principali ellissoidi (locali):

	a (Km) semiasse raggio equatoriale	α (circa uguale 1:300)
ERATOSTENE (284a.C.–202d.C)	5950,000	considera una sfera
BESSEL (1841)	6377,397	1:299,20
CLARKE (1866)	6.378,140	0,003407155
HELMERT (1906)	6378,140	1:298,30
HAYFORD (1909) [INTERN. 1924]	6378,388	1:297,00
U.G.G.I. (1967)	6378,160	1:298,25

U.G.G.I. = Unione Geodetica e Geofisica Internazionale (Lucerna)

Le misure topografiche classiche (per la **planimetria**) sono riferite all'ellissoide locale di Hayford, orientato a Monte Mario (Roma).

Per l'**altimetria** ci si riferisce al geoide (gli scarti tra geoide ed ellissoide locale sono limitati a qualche metro).

SISTEMA di RIFERIMENTO GEODETICO del 1980 (GRS80)

(o anche WGS 84 geocentrico)

semiasse :

$$a = 6.378,137 \text{ Km}$$

$$b = 6.356,752$$

costante gravitaz. · massa

$$G \cdot M = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$$

schacciamento

$$\alpha = 1:298,257 = 0,0033528$$

momento di inerzia

$$J = 108263 \cdot 10^{-8}$$

velocità angolare

$$\omega = 7292155 \cdot 10^{-11} \text{ rad /sec}$$

gravità approssimata

$$\gamma_c = 978,033 \text{ gal}$$

COORDINATE GEOGRAFICHE

CASO GEOIDE

CASO ELLISSOIDE

(coordinate astronomiche o geoidiche)

(coordinate ellissoidiche)

La verticale coincide con la normale ma non incontra, di solito, l'asse di rotazione Z-Z.

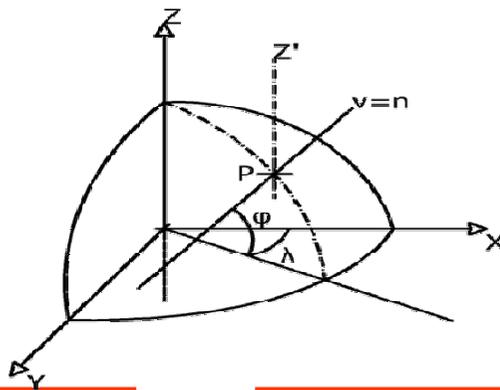
La normale interseca l'asse di rotazione Z-Z nel punto S.

Si definiscono (fig.18-a):

- **latitudine astronomica φ_a**
($0^\circ < \varphi_a < 90^\circ$)
angolo tra verticale e piano equatoriale
- **longitudine astronomica λ_a**
($0^\circ < \lambda_a < 360^\circ$)
angolo tra proiezione ortogonale della verticale su piano e asse X-X

Si definiscono (fig. 18-b):

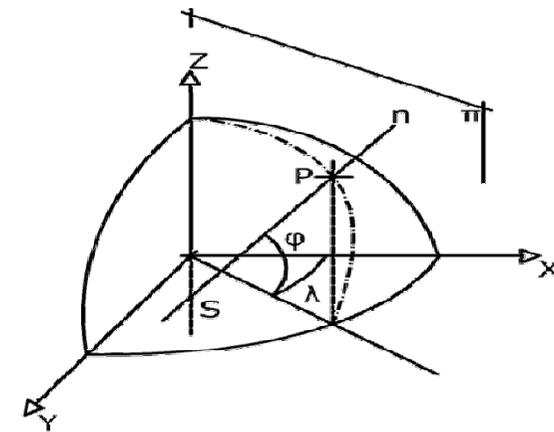
- **latitudine ellissoidica φ_e**
($0^\circ < \varphi_e < 90^\circ$)
angolo tra normale e piano equatoriale
- **longitudine ellissoidica λ_e**
($0^\circ < \lambda_e < 360^\circ$)
angolo tra proiezione ortogonale della normale sul piano e asse X-X



a

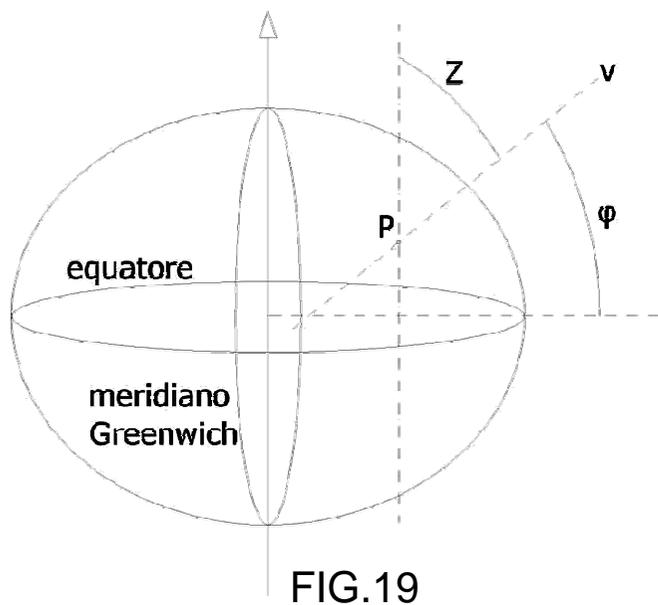
FIG. 18

b



DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE GEOGRAFICHE ASTRONOMICHE

*
S.P.



1. misura della *LATITUDINE* φ_a

nel punto di osservazione P (fig.19) si vede la stella polare (S.P.) in direzione parallela all'asse di rotazione della Terra (le stelle sono delle direzioni); con un teodolite si misura l'angolo Z (zenitale): quindi $\varphi_a = 90 - Z$.

2. misura della *LONGITUDINE* λ_a

- a) a Greenwich si attende che il sole passi per il piano meridiano locale (meridiano di riferimento): ciò indica il "mezzogiorno"; si mette l'orologio alle ore 12:00.
- b) ci si trasferisce nel punto P dove collimando ancora alla stella polare si è, con opportune operazioni, determinato il piano meridiano (può essere fatta anche con l'uso di un *giroscopio geodetico*).
- c) Si attende che il sole passi per questo piano meridiano e si vede nell'orologio, messo con l'ora di Greenwich, quanto tempo è passato: ad ogni ora corrispondono 15° di longitudine.

Le varie operazioni sono più raffinate rispetto a come sono state prima descritte e andranno fatte con maggiore cura. Una buona stazione astronomica di misura può costare 2-3 mesi di lavoro. Si ricorda che:

1'' al centro della terra corrisponde a circa 30 m sulla superficie terrestre

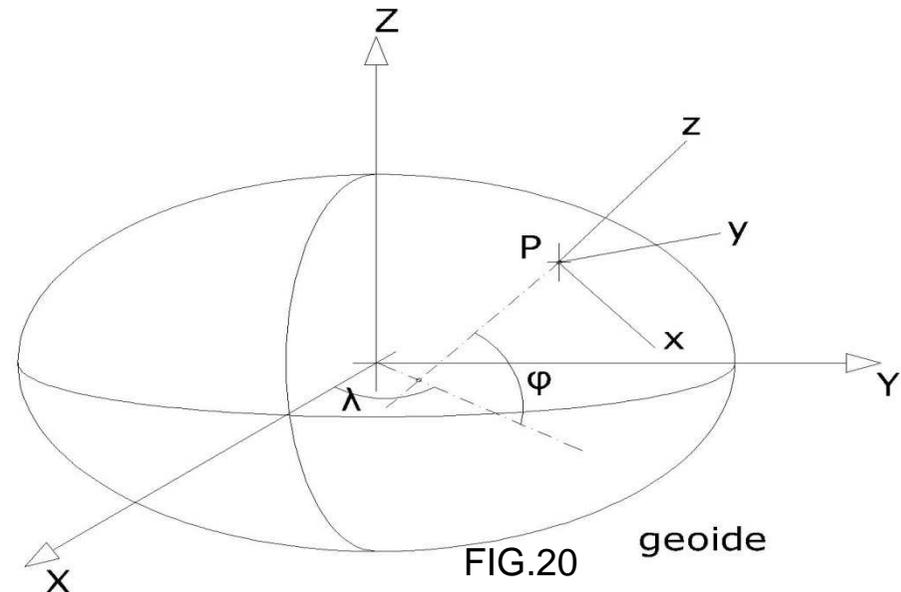
1' al centro della terra corrisponde a circa 1800m (1 miglio) sulla superficie

1° al centro della terra corrisponde a circa 110 Km sulla superficie terrestre

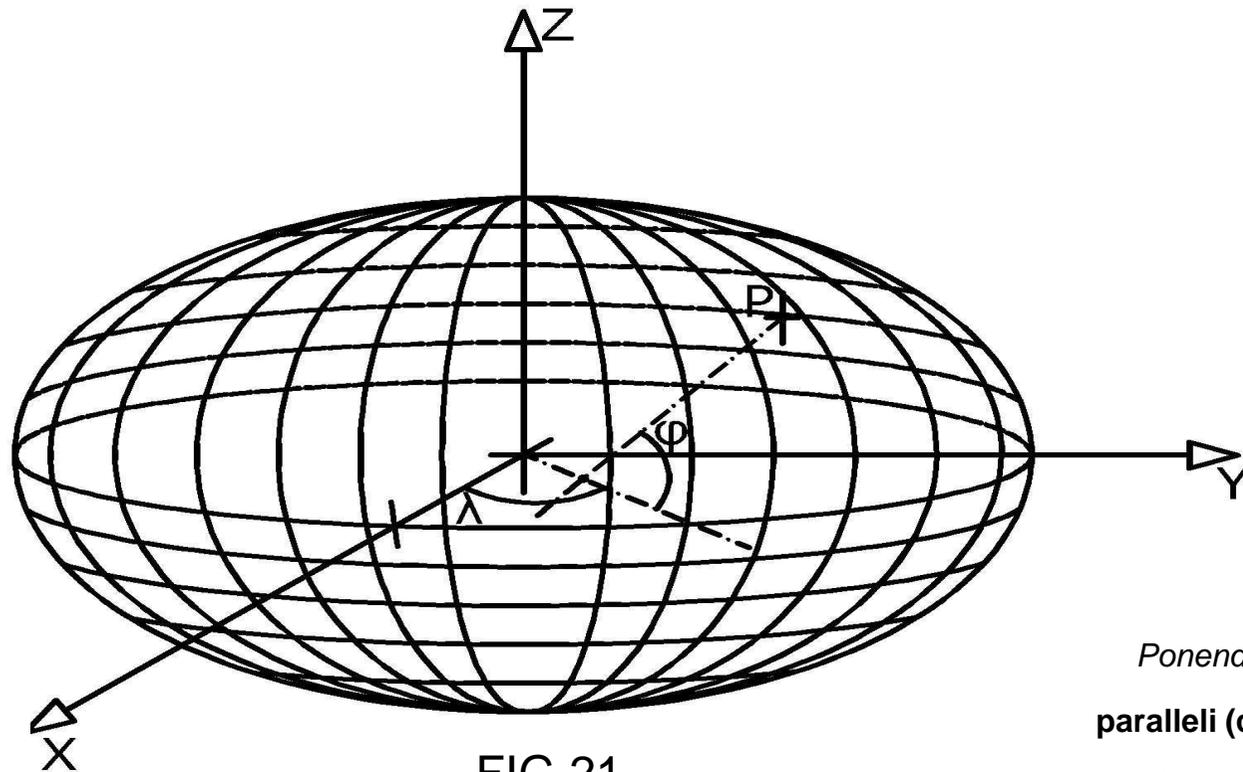
(le coordinate vanno calcolate con l'approssimazione del millesimo di secondo sessagesimale: a tale quantità corrisponde per la coordinata φ uno spostamento del punto lungo il meridiano di ~ 3 cm mentre per la coordinata λ lo spostamento è di solito minore).

Sia x,y,z una **terna cartesiana locale** e siano X,Y,Z le coordinate cartesiane geocentriche. Il **passaggio** fra le due terne è espresso da (fig.20):

$$\begin{cases} x = Xp + \sin\varphi \cos\lambda \cdot x - \sin\lambda \cdot y + \cos\varphi \cos\lambda \cdot z \\ y = Yp + \sin\varphi \sin\lambda \cdot x - \cos\lambda \cdot y + \cos\varphi \sin\lambda \cdot z \\ z = Zp - \cos\varphi \cdot x \end{cases}$$



Alcuni valori unitari di latitudine e longitudine al variare di alcuni valori di latitudine



Ponendo $\lambda = \text{cost.}$
meridiani (ellissi)
 (geodetiche)

Ponendo $\phi = \text{cost.}$
paralleli (circonferenze)
 (non geodetiche)

FIG.21

ϕ	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°
1"lat.[m]	30,823	30,828	30,83	30,84	30,844	30,85	30,855	30,86	30,866
1"lon.[m]	25,047	24,727	24,40	24,06	23,722	23,37	23,015	22,28	21,903

Ric.5

Equazioni parametriche : ELLISSOIDE

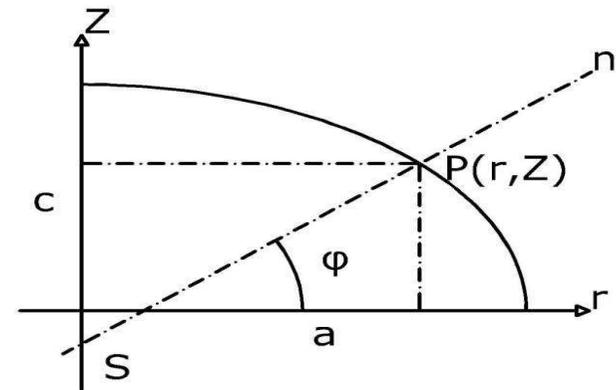


EQUAZIONI PARAMETRICHE di un ELLISSOIDE TERRESTRE

L'equazione di un'ellisse meridiana (fig.22) è:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

FIG.22



Ricordiamo che i **coseni direttori** della normale ad una curva di equazione $f(r,z)=0$ sono proporzionali alle derivate parziali di questa funzione, rispetto ad r e a z , cioè:

$$\cos\varphi = k \frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow \cos\varphi = k \frac{2r}{a^2}$$

$$\cos(90 - \varphi) = \sin\varphi = k \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow \sin\varphi = k \frac{2z}{c^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{z}{r} \frac{a^2}{c^2} \quad \text{eccentricità} = e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \therefore \left(= \alpha(2 - \alpha) \approx 2\alpha \approx \frac{1}{150} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{z}{r} \frac{1}{1 - e^2} \Rightarrow z = r(1 - e^2) \tan \varphi$$

da cui, sostituendo
nell'equazione precedente:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2(1 - e^2)^2 (\tan \varphi)^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$r^2 = \frac{a^2}{1 + (\tan \varphi)^2 - e^2 (\tan \varphi)^2} = \frac{a^2 (\cos \varphi)^2}{1 - e^2 (\sin \varphi)^2} \quad r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 (\sin \varphi)^2}}$$

$$\begin{cases} r = \frac{a \cos \varphi}{W} \\ z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche dell'ellisse}$$

Osservando che:

$$X = r \cdot \cos \lambda \quad Y = r \cdot \sin \lambda \quad W = (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

Equazione parametrica **ellissoide**

$$\begin{cases} X = \frac{a \cos \varphi}{W} \cos \lambda \\ Y = \frac{a \cos \varphi}{W} \sin \lambda \\ Z = \frac{a(1 - e^2)}{W} \sin \varphi \end{cases}$$

Ric.6

RAGGI di CURVATURA

cosa succede nell'intorno di un punto su una superficie

per una **curva**, si determinano le curvatures di flessione

per una **superficie**, definire le sezioni normali principali

raggi principali di curvatura

teorema di Eulero

raggio di una sfera osculatrice

valore di raggio minimo

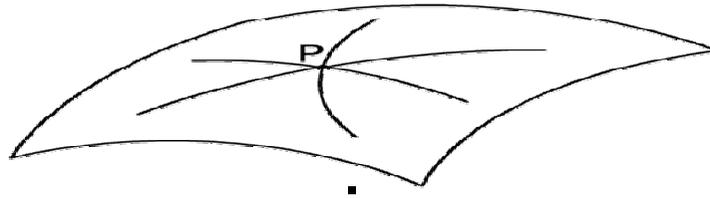
teorema di Meusnier

valore di raggio massimo

RAGGI di CURVATURA

Si vuole studiare cosa succede nell'intorno di un punto non singolare della **superficie terrestre**. Ricordiamo che per studiare l'intorno di un **punto di una curva** è sufficiente determinare la **curvatura di flessione** e la **curvatura di torsione**. Sulla **superficie**, si ricorre allo studio della prima curvatura delle infinite linee appartenenti alla superficie e passanti per il punto stesso.

Ricordiamo che:



- il **piano** ha raggio di curvatura ∞ ;
- la **sfera** ha un solo raggio di curvatura;
- **altre superfici** hanno più raggi di curvatura.

Si possono allora definire i **raggi principali di curvatura delle sezioni normali principali**.

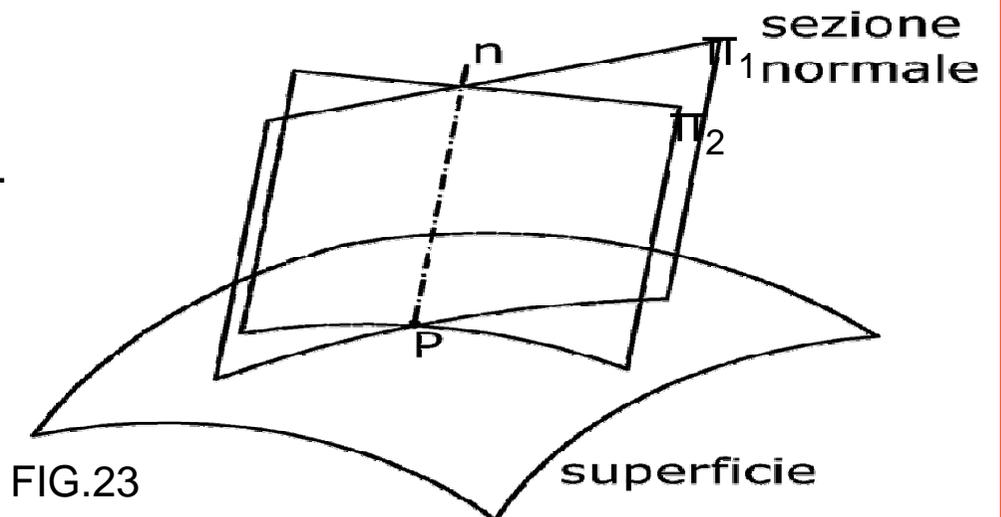


FIG.23

Ma cos'è una SEZIONE NORMALE?

E' la linea piana intersezione, sulla superficie di riferimento, di un piano che contiene la normale alla superficie. Si può intersecare la superficie con infinite sezioni normali.

Se la superficie è, ad es., quella di una SFERA, le sezioni normali sono tutte uguali e sono dei CERCHI.

E se è un cilindro?

Ci sono anche qui infinite sezioni normali, ma ce ne sono due particolari che hanno il *raggio di curvatura minimo* (r) e il *raggio di curvatura massimo* (∞) (fig. 24).

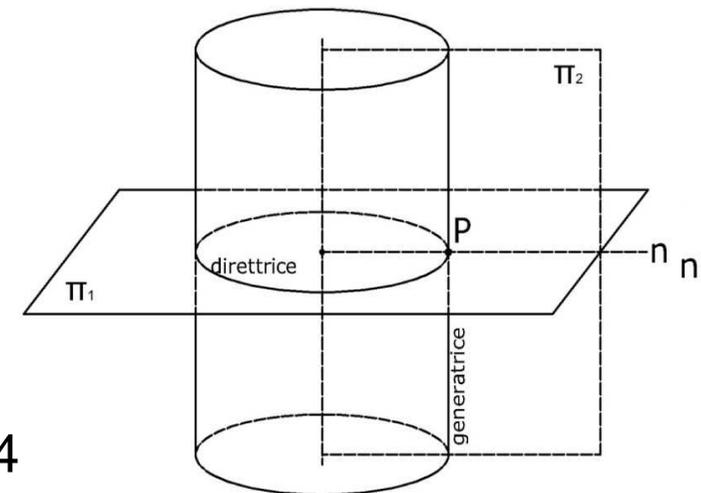
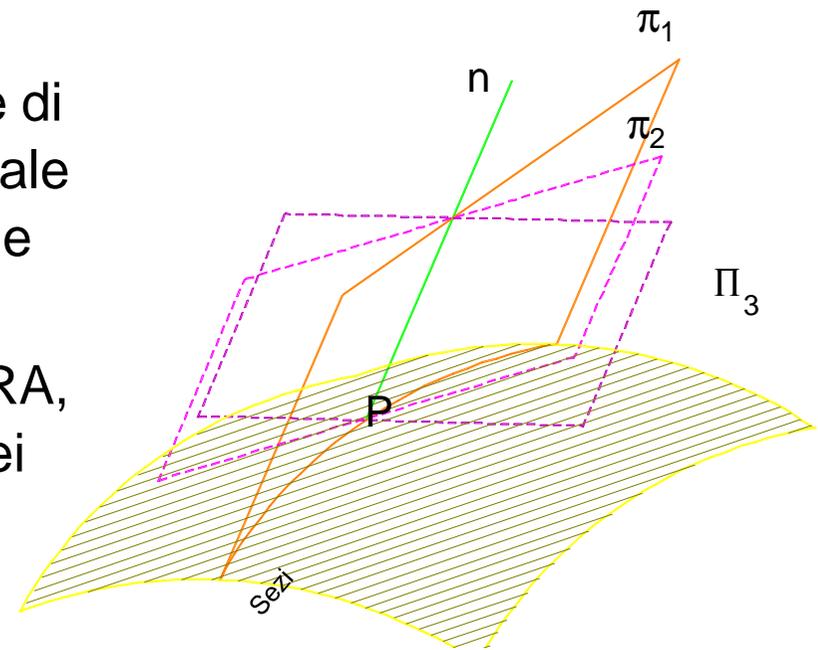


Fig.24

E nell'ellissoide? Succede qualcosa di analogo: si ha un raggio di curvatura minimo ρ nella sezione a-a (piano meridiano Π_1 cioè piano che contiene oltre alla normale in P alla superficie, anche l'asse di rotazione)(FIG.25).

Poi si prende un piano Π_2 che abbia come costola la normale in P e sia a 90° col piano precedente Π_1 : si ottiene un'altra sezione normale b-b con raggio di curvatura N (gran-normale).

Questa sezione normale, nel caso dell'ellissoide, risulta tangente al parallelo, cioè entrambe hanno in P la stessa tangente.

Una sezione normale qualsiasi, formata cioè da un piano che forma un angolo α col piano Π , ha un raggio di curvatura (**TEOREMA di EULERO**):

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

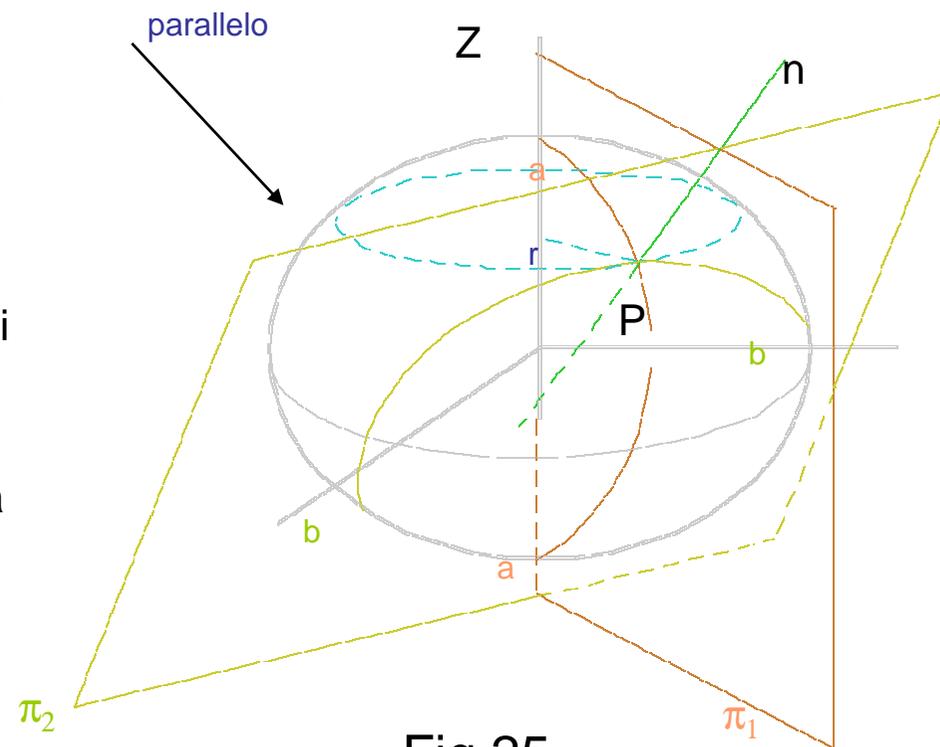


Fig.25

In definitiva si ottiene:

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}$$

Dove si ha che: $W = f(\varphi) = (1 - e^2)^{1/2}$

Per ricavare il raggio di curvatura massimo N (gran normale) bisogna ricordare il **teorema di Meusnier**:

“il raggio di curvatura r di una sezione obliqua qualsiasi è uguale al raggio di curvatura della sezione normale che ha la stesa tangente moltiplicato per il coseno dell'angolo formato tra i piani delle due sezioni” (Alcuni valori: ellissoide di Bessel)

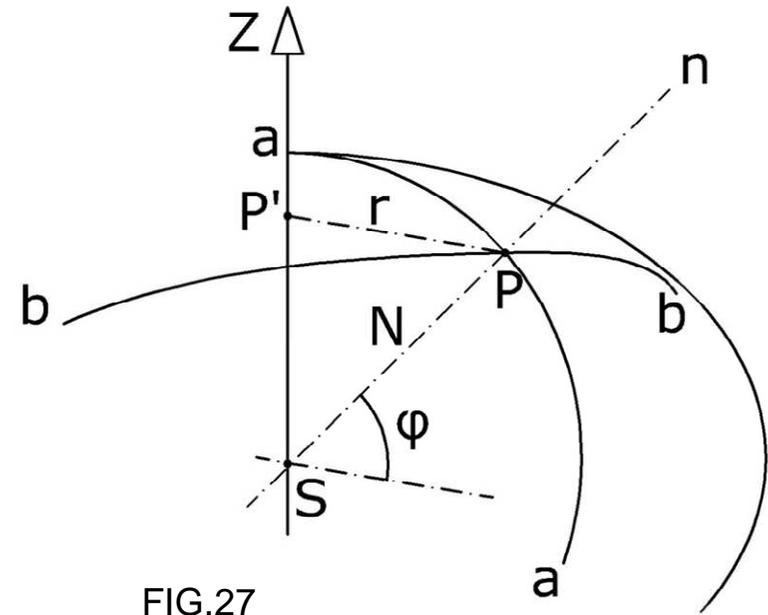


FIG.27

$$r = N \cos \varphi$$

$$N = a / W$$

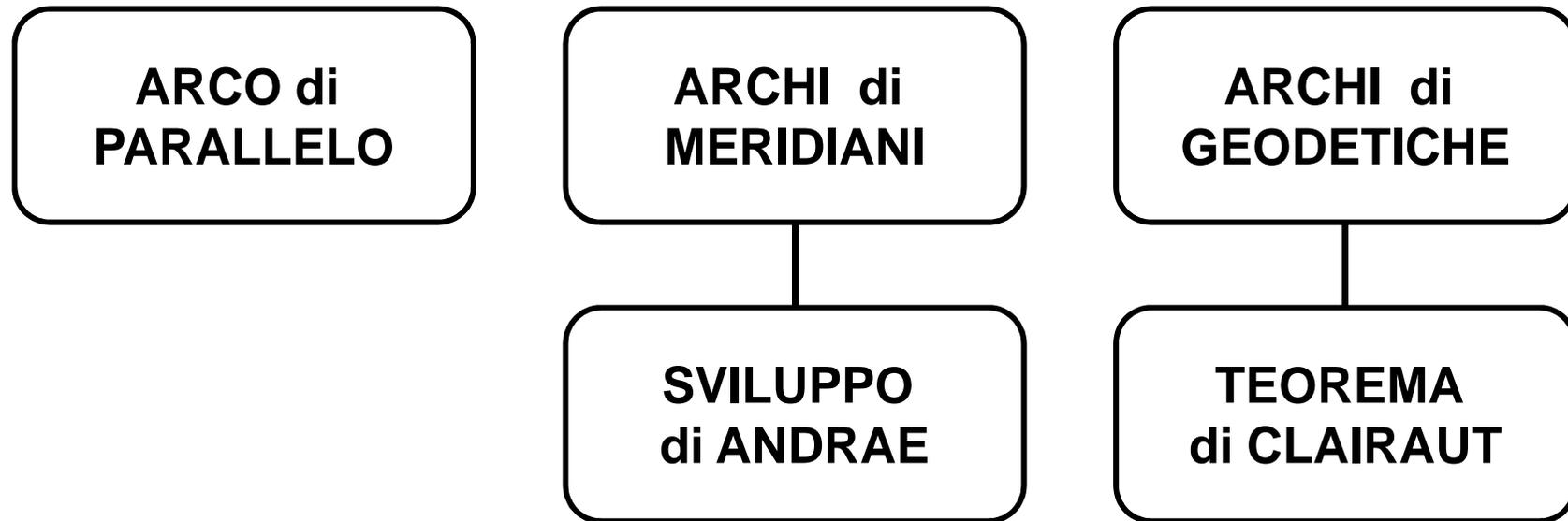
φ	r	N	ρ	osservazioni
0°	r = N = a = 6377397m	0.993 a = 6332755m	a = 6377393m	N - ρ ≈ 44 Km
90°	r → 0	1,0034 a = 6399080m	1,0034 a = 6399080m	N = ρ

Per a=6.378.388 m (ellissoide.internazionale.) e²=0,0067226 W³=0,99496229 raggio di curvatura

minimo ρ = 6.367.578 m

Ric.7

LUNGHEZZE di ARCHI



LUNGHEZZA degli ARCHI di PARALLELO e MERIDIANO

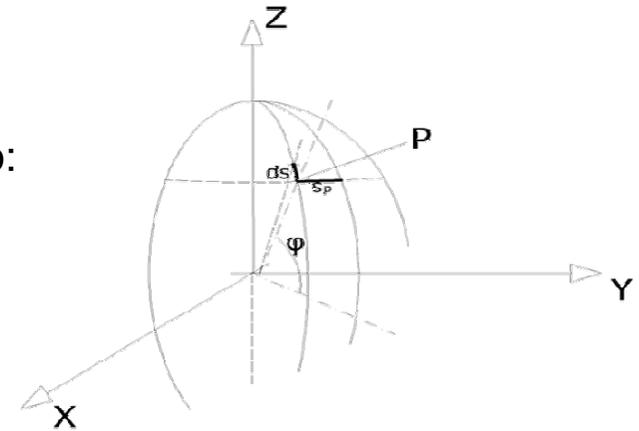
a) $S_p = \text{arco di parallelo} = r \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{W}$

b) $ds = \text{arco elementare di meridiano} = \rho \cdot d\varphi = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} \cdot d\varphi$

$S_m = ?$

Si può fare uno sviluppo in serie del tipo:
 $(1-x)^n = 1 - nx + \dots$ **sviluppo di Andrae**

FIG.28



$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} \cdot d\varphi$$

si ottiene

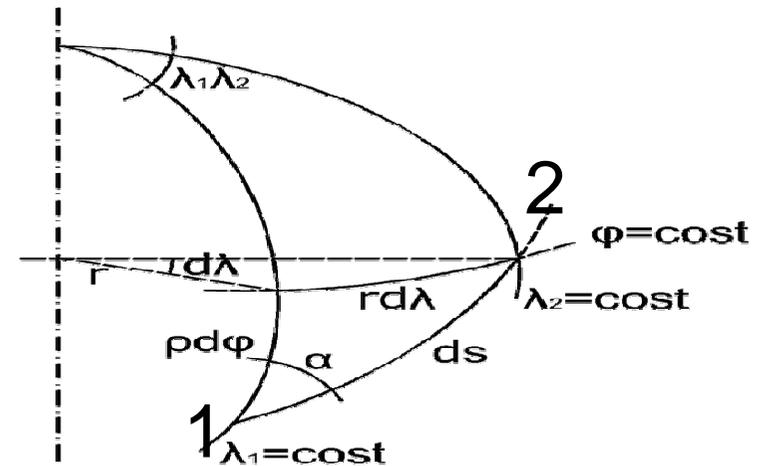
considerando $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

$$S_{1,2} = \rho \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{a \cdot e^2 \cdot (1 - e^2)}{8} \cdot \left[\cos 2\varphi_m + \frac{5}{2} \cdot e^2 \cdot \text{sen} 2\varphi_m \cdot \text{sen} 3\varphi_m \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \right] + \dots$$

trascurando i termini successivi, si commette l'errore di 1 mm per un arco di 5^0 .

EQUAZIONI DELLE GEODETICHE

FIG.29



La GEODETICA è definita come:

“quella linea di superficie , che gode della proprietà che la normale in ogni suo punto coincide con la normale alla superficie”

(è anche la “minima” distanza ds , sulla superficie, tra due punti 1 e 2) (fig.29).

1) Se $f(X,Y,Z)=0$ è l'equazione della superficie, i coseni direttori della normale alla superficie sono proporzionali a:

$$\frac{1}{2s} \cdot \frac{\partial f}{\partial X} \quad \frac{1}{2s} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \quad \frac{1}{2s} \cdot \frac{\partial f}{\partial Z}$$

essendo:

$$2s = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

2) Se la linea è in forma parametrica, si ha

$$\begin{cases} X = X(s) \\ Y = Y(s) \\ Z = Z(s) \end{cases}$$

essendo s la lunghezza della linea valutata da un punto determinato; i **coseni direttori** della normale alla linea sono proporzionali a:

$$R \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \quad R \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \quad R \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}$$

(con R indichiamo il raggio di 1° curvatura)

3) Uguagliando si ottiene:

$$\boxed{\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}}$$

Per l'ellissoide $\left(x^2 + y^2 - a^2 + \frac{z^2}{1-e^2}\right) = 0$ si ha che: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

per cui $x \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} - y \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} = 0$ ovvero $\frac{d}{ds} \left(x \cdot \frac{dy}{ds} - y \cdot \frac{dx}{ds} \right) = 0$

ed integrando $x \cdot \frac{dy}{ds} - y \cdot \frac{dx}{ds} = \text{costante}$

poiché

$$\begin{cases} X = r \cdot \cos \lambda \\ Y = r \cdot \sin \lambda \end{cases}$$

si ha $\begin{cases} \frac{dX}{ds} = -r \cdot \sin \lambda \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \cdot \frac{dr}{ds} = -Y \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \cdot \frac{dr}{ds} \\ \frac{dY}{ds} = r \cdot \cos \lambda \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \cdot \frac{dr}{ds} = X \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \cdot \frac{dr}{ds} \end{cases}$

da cui si ottiene $r^2 \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \text{costante}$ da cui

$$r \cdot d\lambda = ds \cdot \sin \alpha$$

ed infine

$$r \cdot \sin \alpha = \text{costante}$$

TEOREMA di CLAIRAUT

Indicando con r_0 il raggio del parallelo in coincidenza del quale la geodetica taglia normalmente il meridiano, dove cioè $\alpha=\pi/2$:

$$r \sin \alpha = r_0 = \text{cost}$$

$$\frac{r_0}{r} = \sin \alpha \leq 1$$

Da cui:

$$r \geq r_0$$

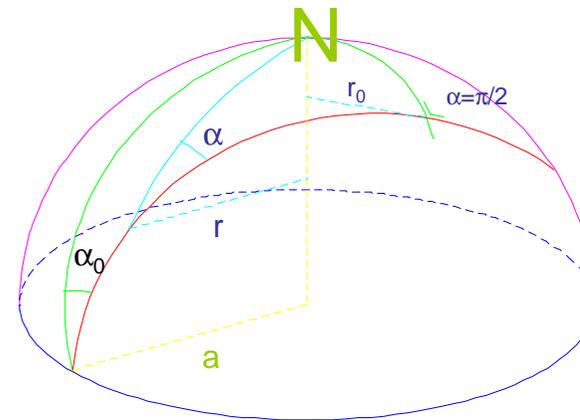
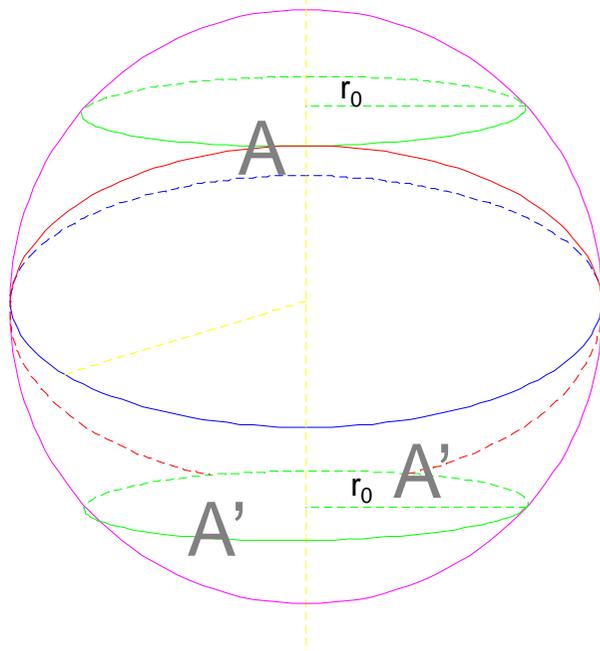


Fig. 29 b

Quindi la geodetica di una superficie di rotazione **deve restare compresa** nella zona ove il raggio del parallelo r resta superiore o uguale al valore r_0 .

(fig.29b)

DEVIAZIONE della VERTICALE ed EQUAZIONE FONDAMENTALE della GEODESIA FISICA

Le coordinate geografiche astronomiche Φ e Λ individuano la direzione del vettore \mathbf{v} (verticale); le coordinate geografiche ellissoidiche φ e λ individuano la direzione del vettore \mathbf{n} . La differenza tra le due direzioni è nota come DEVIAZIONE DELLA VERTICALE ed è espressa dalle componenti angolari ξ e η rispettivamente lungo il meridiano e il parallelo (primo verticale).

(ricordare che $T=W-U$ dove T =Potenziale anomalo)

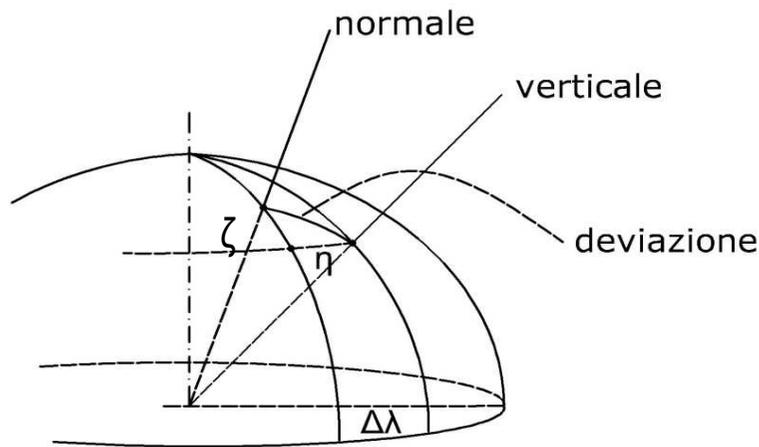


FIG.30

$$\zeta = \Phi - \varphi = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial N}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sigma \gamma} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}$$

$$\varphi = \Phi - \zeta$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi = -\frac{1}{\sigma \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\gamma \sigma \cos \varphi} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda}$$

$$\lambda = \Lambda - \frac{\eta}{\cos \varphi}$$

ζ e η possono essere in certi casi superiori a 20''

Sulla DEVIAZIONE della VERTICALE ε

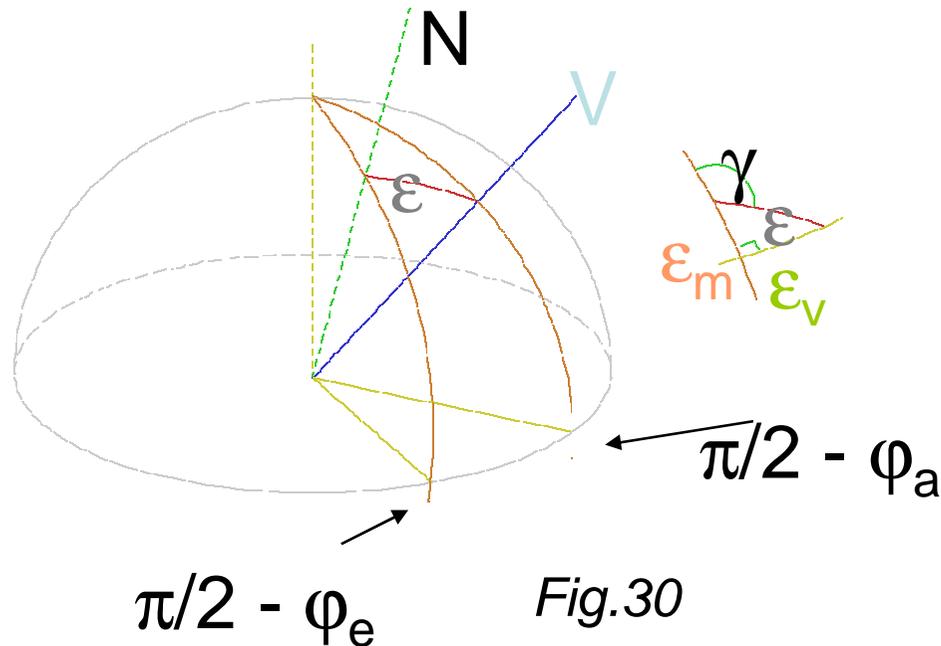


Fig.30

Quindi: $\varepsilon^2 = \varepsilon_m^2 + \varepsilon_v^2$

ε_m è la componente nel piano meridiano
 ε_v è la componente nel piano verticale

$$\varepsilon_m = \varphi_a - \varphi_e$$

$$\sin \varepsilon_v = \sin(\lambda_a - \lambda_e) \cos \varphi_a$$

$$\varepsilon_v = (\lambda_a - \lambda_e) \cos \varphi_a$$

a meno di termini in ε_v^2 .

$$\tan \gamma = \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_m}$$

sempre a meno di termini in ε_v^2 .

a meno di termini in ε_v^4 .

La differenza tra il modulo della gravità g e quello della gravità approssimata γ è esprimibile approssimativamente con:

$$g(P) - \gamma(P) \cong \frac{\partial \tau}{\partial n'}$$

Si definisce ANOMALIA di GRAVITA' riferita al geoide: $\Delta g = g(P) - \gamma(P)$

Si ha quindi l'equazione fondamentale della GEODESIA FISICA (Q è il piede della normale all'ellissoide per P) (fig.31)

$$\Delta g = (g(P) - \gamma(P)) + (\gamma(P) - \gamma(Q))$$

$$\Delta g \cong \frac{\partial \tau}{\partial n'} + \frac{\partial \gamma}{\partial n'} N = -\frac{\partial \tau}{\partial n'} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n'} \tau$$

ANOMALIA di GRAVITA'

Si noti che il punto P reale si trova sulla superficie topografica ad una certa quota. Si definisce **ANOMALIA di GRAVITA'** Δg^F in aria libera (free air) per la quale si suppone che il contributo in g dello spessore di terra alto H sottostante il punto di osservazione P, sia pari al contributo in γ , per lo stesso dislivello H sovrastante l'ellissoide di riferimento

$$\Delta g^F = g_p - \gamma_a \cong g_p - \gamma_s - \frac{\partial \gamma}{\partial n'} H$$

Dove

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n'} \cong 0.3086 \frac{mgal}{m}$$

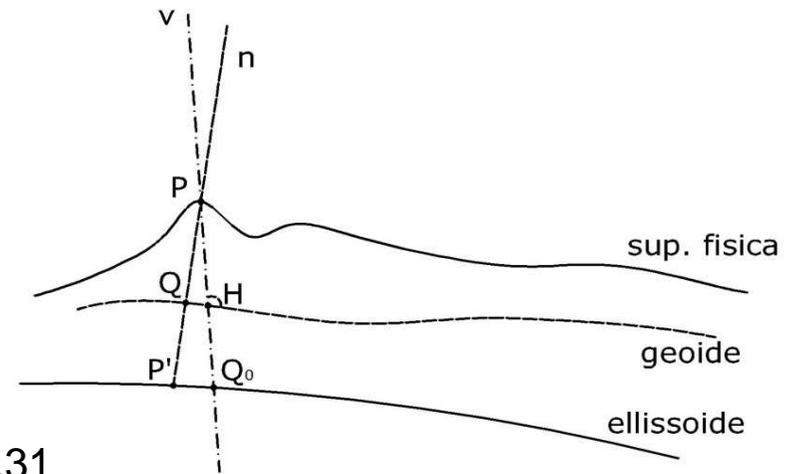
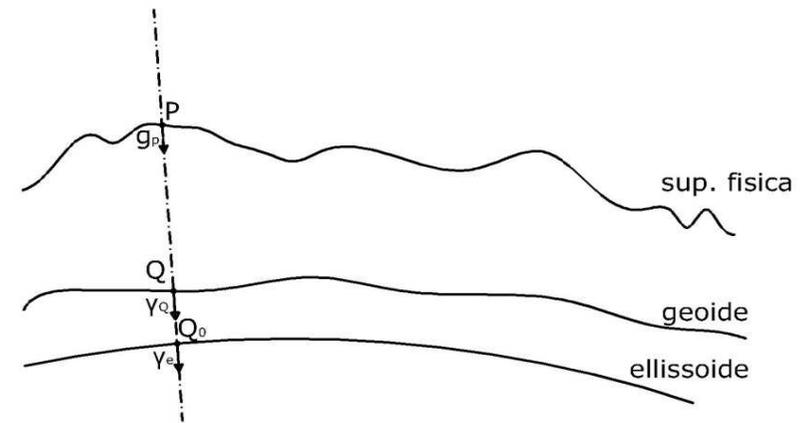


FIG.31

FORMULA di BRUNS

Si è imposto che il **potenziale W sul geoido** sia pari al **potenziale normale U sull'ellissoide** e cioè:

$$U_{(Q)} - W_{(P)} = W_0$$

Vale allora

$$T_{(P)} = W_{(P)} - U_{(P)} = - (U_{(P)} - U_{(Q)}) \cong \frac{\partial U}{\partial n} PQ = \gamma_{(Q)} \cdot N$$

nota come **FORMULA di BRUNS** (o anche $N = \frac{T}{\gamma}$)

T = potenziale anomalo

N = ondulazione del geoido

γ = gravità approssimata

Convergenza dei meridiani

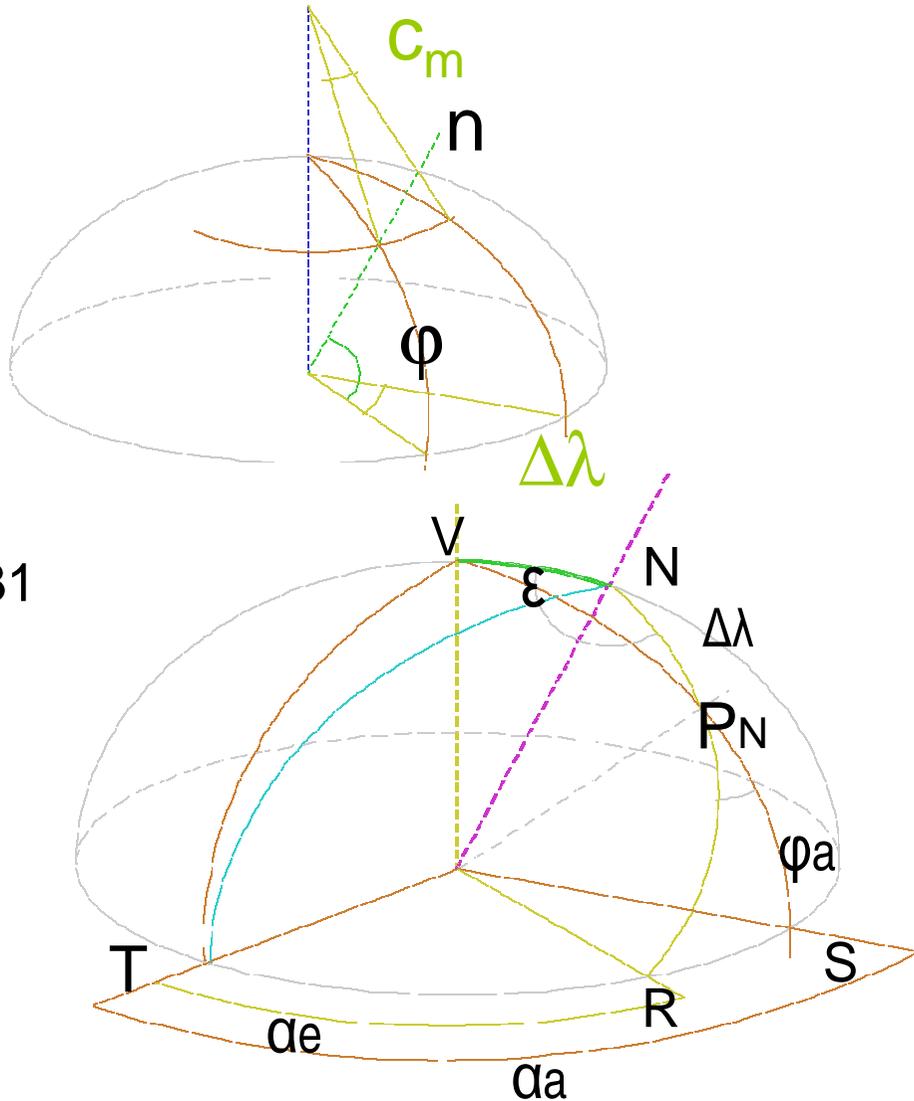


Fig.31

$$c_m = \alpha - \alpha_0 = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_m$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

EQUAZIONI DI LAPLACE

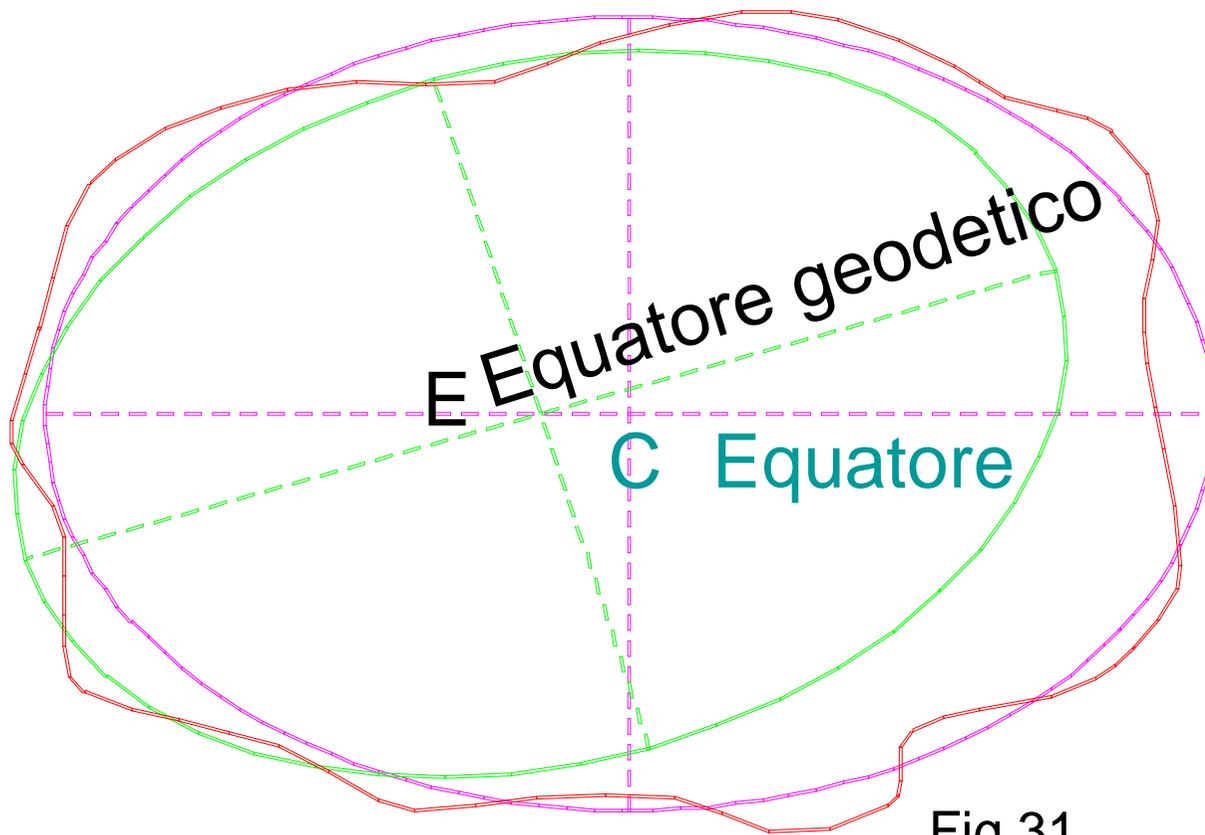
$$\tan(\alpha_a - \alpha_e) = \sin \varphi_a \cdot \tan(\lambda_a - \lambda_e)$$

$$\alpha_a - \alpha_e = (\lambda_a - \lambda_e) \sin \varphi_a$$

a meno di termini in ε^2

Dal TERRENO O SUPERFICIE FISICA, si introducono:

- GEOIDE
- SFEROIDE
- ELLISSOIDE GEODETICO di RIFERIMENTO
- ELLISSOIDE GEOCENTRICO di RIFERIMENTO
- SFERA
- PIANO TANGENTE
- TELLUROIDE: superficie la cui quota, rispetto all'ellissoide geocentrico di riferimento, è uguale a ciò che si ha tra il terreno ed il geoide.
- QUASIGEOIDE: non ha significato fisico; è una pura invenzione matematica. Si possono definire delle "quote quasigeoide" chiamate QUOTE ANOMALE, indicate con ξ , che si calcolano esattamente. Sono usate nell'ex URSS ed in alcuni Paesi dell'Est europeo.
- ELLISSOIDE IDROSTATICO di EQUILIBRIO : viene usato per scopi di geofisica. E' un ellissoide biassiale.



GEOIDE

ELLISSOIDE
GEODETICO DI
RIFERIMENTO

ELLISSOIDE
GEOCENTRICO DI
RIFERIMENTO

Fig.31

Ric.8

OPERAZIONI di MISURA PLANIMETRICHE

definizioni di:
DISTANZE - ANGOLI

Teoremi della *geodesia operativa*
(formule di Puiseux-Weingarten)

MISURE

Finora abbiamo definito:

- ***distanza tra due punti*** : la lunghezza dell'arco di geodetica tra i due punti (fig.32);
- ***angoli tra geodetiche*** : gli angoli tra le tangenti alle geodetiche (fig.32).

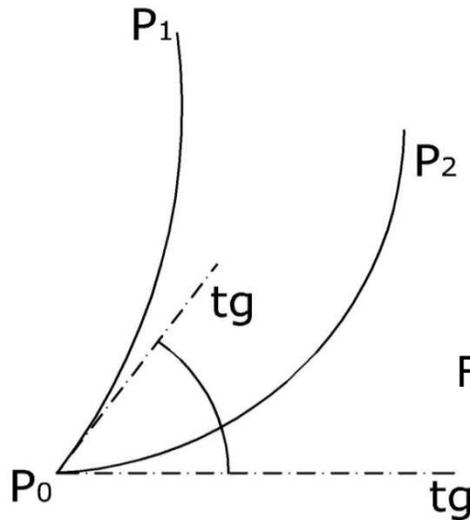


FIG.32

Le **misure** vengono effettuate sul terreno, cioè sulla superficie fisica della Terra; le distanze e gli angoli sopra definiti **non** possono quindi essere misurati rispetto a questa superficie. Queste quantità vengono **calcolate** invece rispetto alla superficie di riferimento (ellissoide o geoida).

Si ricorda che con gli **strumenti topografici** si realizzano piani verticali.

Lo strumento ha il suo asse principale lungo la direzione della verticale. Sappiamo che può esserci un errore di verticalità anche nei teodoliti di precisione ed abbiamo visto (o vedremo) come questo errore può ridursi o essere eliminato.

Nell'ipotesi che lo strumento abbia il suo asse principale lungo la direzione della linea di forza della gravità (verticale), questo asse e l'asse di collimazione ad un punto definiscono un "**piano verticale**".

La verticale di un punto non coincide però con la normale nel punto alla superficie di riferimento/ellissoide: si ha una deviazione della verticale che può assumere in certi casi il valore di 10"-20" o anche maggiori. Per valori bassi di questo angolo di deviazione e se si fanno misure non di alta precisione, *si può pensare che verticale e normale coincidono*. Ma se invece si fanno misure di alta precisione, occorre tenere conto della **deviazione** ed occorre valutarla ed apportare le correzioni alle misure angolari (azimutali e zenitali).

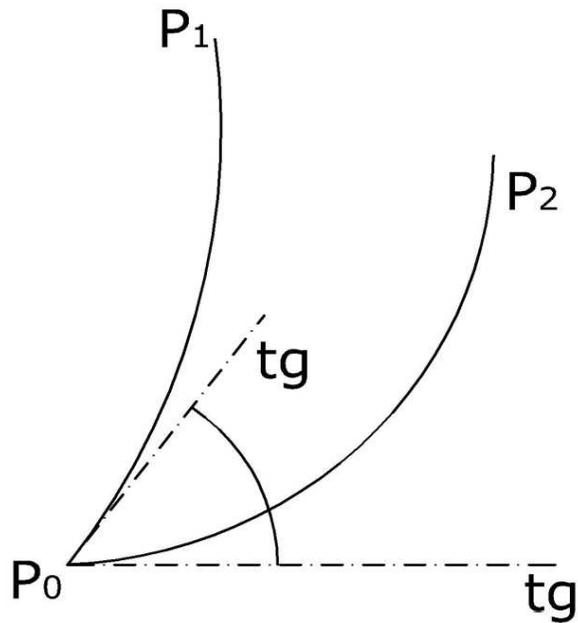


FIG.33

Se nel punto di stazione, verticale e normale coincidono (o possono essere considerati tali), il piano verticale è un piano normale e dà luogo ad una *sezione normale*.

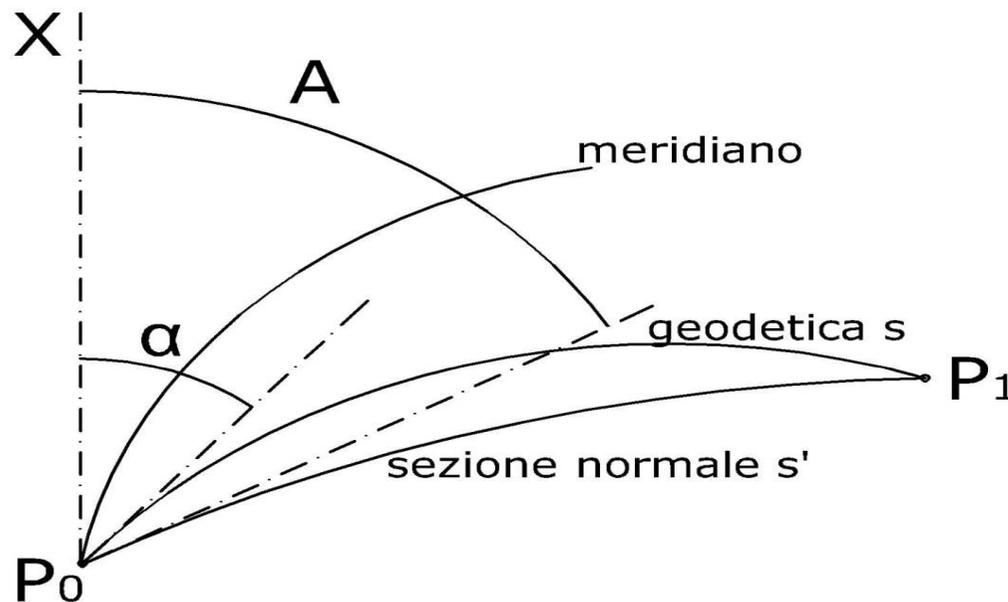
Allora le distanze P_0P_1 , P_0P_2 , ecc. vengono misurate su sezioni normali e l'angolo $P_1P_0P_2$ è un angolo tra due sezioni normali (fig.33).

Non si verifica quasi mai la coincidenza tra verticale e normale: si realizzano quindi piani **obliqui**.

Il piano che contiene verticale e asse di collimazione, non è una sezione normale, perché non contiene la normale (*sezioni normali e geodetiche non coincidono*).

Infine, le normali in P_0 ed in P_1 non sono in genere complanari.

TEOREMI DELLA GEODESIA OPERATIVA



Dati due punti P_0 e P_1 sull'ellissoide: P_0P_1 sia la geodetica che li congiunge, che avrà un **azimut** α ed una lunghezza s .

Si tracci poi la sezione normale P_0P_1 , di azimut A e lunghezza s' .

Ci si chiede che valori hanno le differenze $(A - \alpha)$ ed $(s - s')$.

FIG.34

Per rispondere a queste domande si utilizzano le **formule di PUISEUX-WEINGARTEN**. Queste si presentano nella seguente forma:

$$X = \left[s \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \left(1 - \frac{s^2}{6 \cdot \rho \cdot R_a} + \dots \right) \right]$$

$$Y = \left[s \cdot \operatorname{cos} \alpha \cdot \left(1 - \frac{s^2}{6 \cdot N \cdot R_a} + \dots \right) \right]$$

$$Z = \left[\left(-\frac{s^2}{2 \cdot R_a} \right) \cdot (1 - \dots) \right]$$

da cui risulta:
$$A - \alpha = \left[\left(\frac{s^2}{12 \cdot N \cdot R_a} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \operatorname{cos}^2 \varphi \cdot \rho^2 \right) \right]$$

Alcuni valori per $\alpha = 45^\circ$ (errore massimo)

φ	s = 100Km	s = 200Km	s = 300Km
0°	A- α = 0,03''	A- α = 0,14''	A- α = 0,26''
45°	A- α = 0,01''	A- α = 0,07''	A- α = 0,13''

Infine per le distanze risulta che:

$$\frac{s' - s}{s} = \left[\left(\frac{1}{360} \cdot \frac{s^4}{12 \cdot N^2 \cdot R_a^2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \text{sen}^2 2\alpha \cdot \text{cos}^4 \varphi \right) \right]$$

L'errore relativo è dell'ordine del mm su 100 Km.

Quindi: “in tutte le misure di angoli e distanze sulla superficie di riferimento, i valori ottenuti operando secondo le sezioni normali, possono essere considerati sempre, almeno sino a distanze di alcune centinaia di chilometri e senza errore apprezzabile, uguali agli angoli ed alle lunghezze relativi alle linee geodetiche che congiungono gli stessi punti”.

Ciò vale per operazioni di normale precisione, a scopi in particolare cartografici.

Perciò dal punto di **vista concettuale** tali differenze esistono, ma dal punto di vista pratico sono sicuramente trascurabili.

Nelle operazioni di misura, notato che gli errori sono trascurabili, possiamo confondere la normale con la verticale.

Ric.9

OPERAZIONI di CALCOLO

CAMPO GEODETICO o di WEINGARTEN

CAMPO TOPOGRAFICO

TEOREMA di LEGENDRE

CAMPO GEODETICO o di WEINGARTEN

Per lavorare con le linee geodetiche, prendendo come superficie di riferimento l'ellissoide, occorre utilizzare la **trigonometria ellissoidica** per risolvere tutti i problemi relativi ad angoli e distanze su questa superficie.

Prima di affrontare i calcoli bisogna fare una un'osservazione importante: gli archi di geodetica misurati sono molto piccoli se confrontati con i rispettivi raggi di curvatura. Questa condizione ci porta a esaminare la possibilità di semplificare i calcoli, utilizzando per esempio la **trigonometria sferica** o anche, in alcuni casi, quella **piana**.

I problemi relativi a calcoli di distanze e di angoli nell'intorno di un punto di raggio di circa 100Km, possono essere risolti come se tutti i punti interni dell'intorno descritto appartenessero ad una **sfera** tangente all'ellissoide nel punto precedentemente considerato.

La sfera tangente presa in considerazione viene chiamata “sfera locale”, e l’intorno considerato viene definito come “campo geodetico” o “campo di Weingarten”.

Si può individuare l’errore che si commette nel considerare le coordinate sferiche al posto di quelle ellissoidiche. Per far ciò si calcola la differenza tra i due tipi di coordinate e si ottiene:

$$X_S - X_E = -s \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{s^2}{6\rho N} \cdot \frac{e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$Y_S - Y_E = s \cdot \operatorname{cos} \alpha \cdot \frac{s^2}{6\rho N} \cdot \frac{e^2 \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$Z_S - Z_E = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R} \right) \cong \frac{s^2}{\sqrt{\rho N}} \cdot \frac{e^2 \cdot \operatorname{cos}^2 \varphi \cdot \operatorname{cos} 2\alpha}{4}$$

dove i pedici S ed E indicano rispettivamente le coordinate sferiche ed ellissoidiche. Per quanto riguarda le differenze tra le coordinate X e Y, queste sono inferiori a 27mm per tutti i punti nell’intorno di un raggio s=100 Km.

CAMPO TOPOGRAFICO

Per quanto riguarda gli intorni di un punto di raggio non superiore ai 15/20 km si può utilizzare la **trigonometria piana**; questi intorni vengono chiamati “*campi topografici*”. Anche in questo caso si possono calcolare gli errori commessi fatti nell'approssimazione della sfera con un suo piano tangente nel punto, facendo ancora riferimento alle formule del tipo appena descritte (calcolo delle differenze di coordinate sferiche e piane), ottenendo errori inferiori a 10^{-6} Km, i quali possono essere considerati trascurabili.

CENNI di TRIGONOMETRIA SFERICA

Sia dato il triangolo sferico ABC.

Nella trigonometria sferica non si considerano lunghezze, ma angoli; se la sfera avesse raggio unitario $R=1$ si avrebbe $AC = \beta \cdot R = \beta$ e così via.

Esiste una importante differenza tra triangoli piani e sferici:

la somma degli angoli interni di un triangolo sferico non è 180° , ma maggiore.

Infatti: $a + b + c = \pi + 3\varepsilon$

dove 3ε è chiamato **eccesso sferico** ed è definito come:

$$3\varepsilon = \frac{\text{sup. triangolo}}{R^2}$$

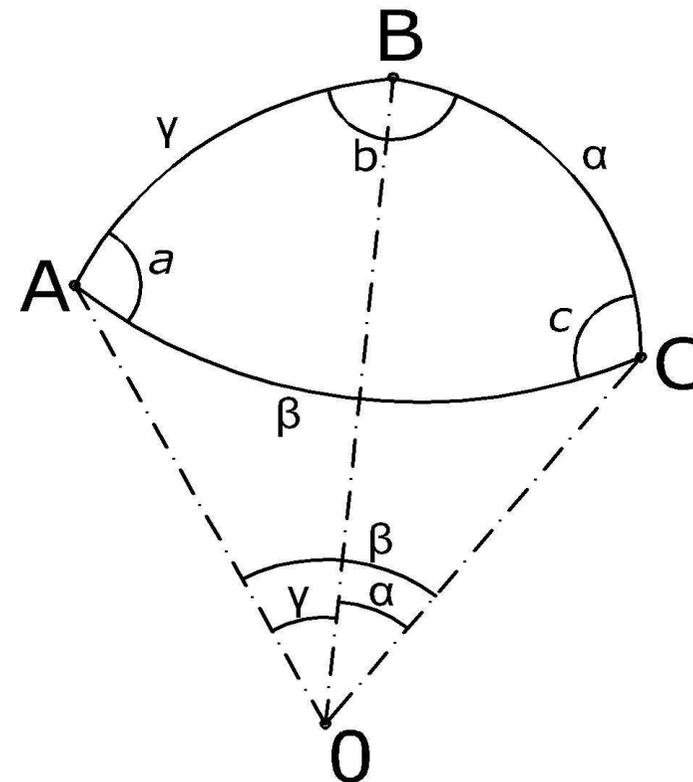


FIG.35

POSSIAMO SCRIVERE ALCUNI TEOREMI di trigonometria sferica:

TEOREMA DEI SENI:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \beta} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen } \gamma}$$

TEOREMA DELLE PROIEZIONI:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a) = -\cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos \alpha$$

ALTRI TEOREMI VALIDI:

$$\text{sen } \alpha \cdot \cotg \beta = \cotg(b) \cdot \text{sen}(c) + \cos \alpha \cdot \cos(c)$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{b-c}{2} = \text{tg } \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \cos \frac{b+c}{2}$$

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cdot \cos(\sigma - a)}{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c)}} \quad \text{dove } \sigma = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\text{sen } \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}(s - \beta) \cdot \text{sen}(s - \gamma)}{\text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma}} \quad \text{dove } s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$$

TEOREMA di LEGENDRE

Se si verificano certe condizioni, il triangolo sferico può risolversi come triangolo piano; infatti **se il triangolo sferico possiede lati molto piccoli** (cioè circa una decina di Km) **il rapporto L/R risulta molto piccolo**.

Ad esempio se il lato L del triangolo misurasse 30 Km si avrebbe:

$$L/R = 30/6000 = 1/200 = 0,005 \text{ rad}$$

Un triangolo, con le caratteristiche sopra descritte, equivale a un triangolo piano che ha le **STESSE LUNGHEZZE DEI LATI** del triangolo sferico e i **CORRISPONDENTI ANGOLI DIMINUITI** di $1/3$ DELL'ECCESSO SFERICO (fig.36).

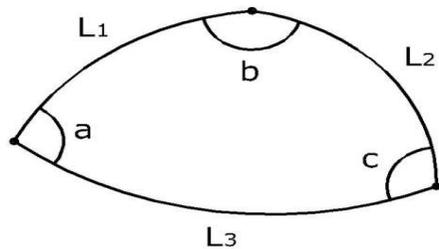
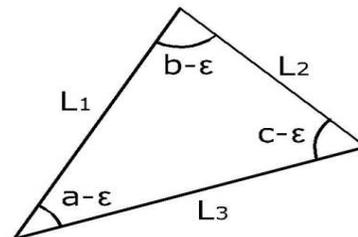


FIG.36



Si dimostra che gli errori che si commettono nel valutare gli **angoli**, nel fare cioè questa semplificazione, sono dell'ordine di $(L/R)^4$, cioè del 4° ordine, considerato del 1° ordine il rapporto L/R .

Si noti che anche per lati dell'ordine di 100 Km il rapporto $(L/R)^4$ è ancora molto piccolo.

Per lati del triangolo di 60 km, la superficie è di circa 1600 km². L'eccesso sferico vale circa $4 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 24 \text{ cc}$; l'errore con cui si ricavano gli angoli nel triangolo piano è dell'ordine di $\sim 0,006 \text{ cc}$.

Ric. 10

CALCOLO di COORDINATE su PUNTI dell' ELLISSOIDE



Ricordiamo che le coordinate ellissoidiche sono di due tipi:

- *generali*
- *locali*

1° PROBLEMA DIRETTO: TRASPORTO DELLE COORDINATE GEOGRAFICHE

“Date le coordinate geografiche di $O(\varphi, \lambda)$
e quelle geodetiche di P rispetto ad $O(\alpha, s)$,
calcolare le coordinate geografiche di $P(\varphi_p, \lambda_p)$.” (φ_1, λ_1)

È impossibile trovare delle espressioni finite di (φ_p, λ_p) in funzione della distanza s e dell'angolo α .

Si ricorre per questo motivo a degli *sviluppi in serie*: un metodo è quello introdotto da *Legendre*.

Partendo da:

$$\varphi_1 = \varphi_1(s)$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(s)$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(s)$$

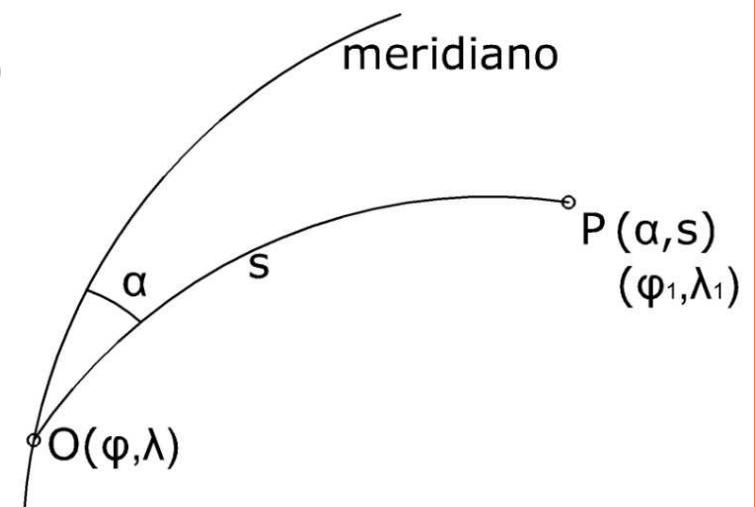
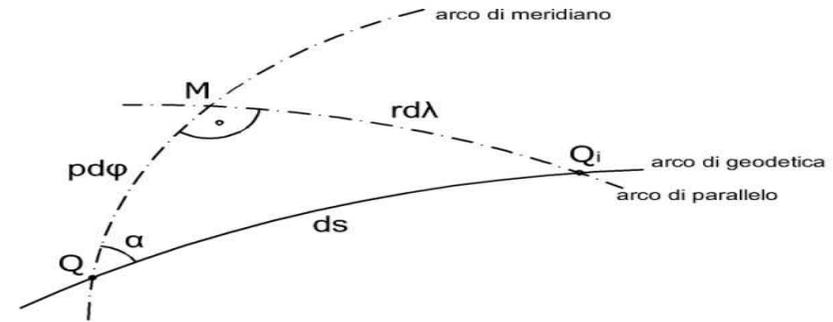


FIG.37

Sviluppando in serie di TAYLOR si ha:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi + s \cdot \frac{d\varphi}{ds} + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{s^3}{3!} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} + \dots \\ \lambda_1 = \lambda + s \cdot \frac{d\lambda}{ds} + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{s^3}{3!} \cdot \frac{d^3\lambda}{ds^3} + \dots \end{cases}$$



Dal triangolo infinitesimo QQ₁M si ottiene:

$$\rho \cdot d\varphi = ds \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\rho} \qquad r \cdot d\lambda = ds \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{N \cdot \cos\varphi}$$

E in seguito, lavorando su $d^2\varphi/ds^2$:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos\alpha}{\rho} \right) \left(\frac{\cos\alpha}{\rho} \right) = \left(\frac{-\sin\alpha}{\rho} \cdot \frac{d\alpha}{d\varphi} + \frac{\cos\alpha}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\rho} \right)$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = a \cdot (1-e^2) \cdot (1-e^2 \cdot \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \cdot (1-e^2 \cdot \sin^2\varphi)^{-1} \cdot 3e^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{\sin\alpha}{r \cdot \cos\alpha} = \dots = \frac{\rho}{r} \cdot \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Analoghi passaggi per $d^2\lambda/ds^2$

Formule finali:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{s \cdot \cos\alpha}{\rho} - \frac{s^2 \cdot \sin\varphi}{2 \cdot \rho^2} \cdot \left(\frac{\rho}{N \cdot \cos\varphi} + \frac{3 \cdot e^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos\varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi} \right) - \frac{s^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{6 \cdot \rho^3} \cdot (1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi)$$

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{s \cdot \sin\alpha}{N \cdot \cos\alpha} - \frac{s^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin\varphi}{2 \cdot N^2 \cdot \cos^2\varphi} + \frac{s^3}{6 \cdot N^2 \cdot \cos\varphi} \cdot \left(\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\rho} + \frac{2 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi \cdot \sin 3\alpha}{N} \right) + \dots$$

$$\alpha_1 - \alpha = \dots$$

Ric. 11

CALCOLO di COORDINATE di PUNTI sull' ELLISSOIDE



TRASFORMAZIONE DA COORDINATE GEODETICHE RETTANGOLARI A COORDINATE GEODETICHE POLARI (e viceversa)

grazie al teorema di Legendre possiamo passare dal triangolo sferico al triangolo piano

$$(\alpha - \varepsilon) + (90 - \varepsilon) + \xi = 180^\circ$$

$$\xi = 90 - \alpha - 2 \cdot \varepsilon$$

$$3 \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{X \cdot Y}{\rho \cdot N} = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{\text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha}{\rho \cdot N}$$

per il teorema dei seni si può scrivere:

$$\frac{s}{\text{sen}(90 - \varepsilon)} = \frac{X}{\text{sen}[90 - (\alpha - 2 \cdot \varepsilon)]} = \frac{Y}{\text{sen}(\alpha - \varepsilon)} \Rightarrow \frac{s}{\text{cos} \varepsilon} = \frac{X}{\text{cos}(\alpha - 2 \cdot \varepsilon)}$$

e ricordando che il seno e il coseno sono sviluppabili in serie:

$$\text{cos} \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots$$

$$\text{sen} \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots$$

si può scrivere che:

$$\begin{cases} X = s \cdot \text{cos}(\alpha - 2 \cdot \varepsilon) \\ Y = s \cdot \text{sen}(\alpha - \varepsilon) \end{cases}$$

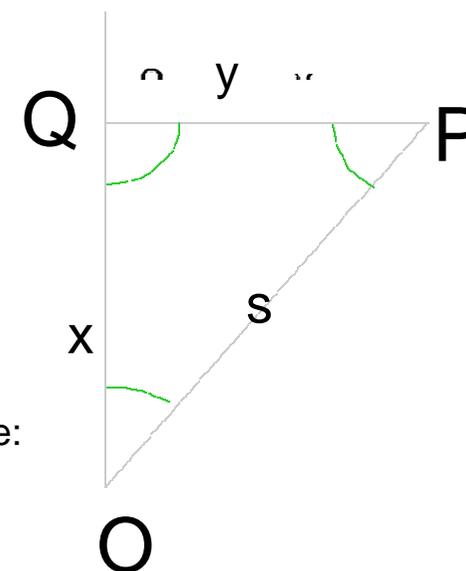
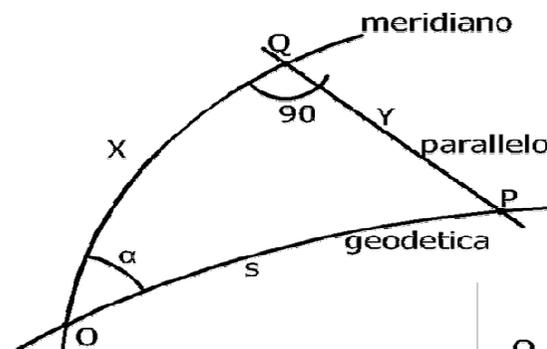


FIG.38

per avere le **FORMULE INVERSE** :

$$\begin{cases} X = s \cdot (\cos\alpha \cdot \cos 2\varepsilon + \sin\alpha \cdot \sin 2\varepsilon) = s \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\varepsilon + s \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\varepsilon \\ Y = s \cdot (\sin\alpha \cdot \cos \varepsilon - \cos\alpha \cdot \sin \varepsilon) = s \cdot \sin\alpha \cdot \cos \varepsilon - s \cdot \cos\alpha \cdot \sin \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = s \cdot \cos\alpha + s \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot \varepsilon \\ Y = s \cdot \sin\alpha - s \cdot \cos\alpha \cdot \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = s \cdot \cos\alpha + Y \cdot 2 \cdot \varepsilon \\ Y = s \cdot \sin\alpha - X \cdot \varepsilon \end{cases}$$

da cui si ricava che :

$$\begin{cases} s \cdot \cos\alpha = X - Y \cdot 2 \cdot \varepsilon \\ s \cdot \sin\alpha = Y + X \cdot \varepsilon \end{cases}$$

facendo il rapporto si ottiene $\text{tg}\alpha \Rightarrow \alpha$

successivamente si può ricavare $\Rightarrow s$

PROBLEMA INVERSO del TRASPORTO delle COORDINATE

“Date le coordinate geografiche di due punti O e P, calcolare le coordinate geodetiche (polari o rettangolari) di P rispetto ad O”

Ricordiamo le formule del problema diretto:

$$\begin{cases} \varphi - \varphi_0 = \frac{s \cdot \cos \alpha_0}{\rho_0} - \frac{s^2 \cdot \sin \varphi_0}{2 \cdot \rho_0^2} \cdot \left(\frac{\rho_0 \cdot \sin^2 \alpha_0}{N_0 \cdot \cos \varphi_0} + 3 \cdot e^2 \cdot \cos^2 \alpha_0 \cdot \cos \varphi_0 \right) + \dots \\ \lambda - \lambda_0 = \frac{s \cdot \sin \alpha_0}{N_0 \cdot \cos \alpha_0} - \frac{s^2 \cdot \sin 2\alpha_0 \cdot \sin \varphi_0}{2 \cdot N_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0} + \dots \end{cases}$$

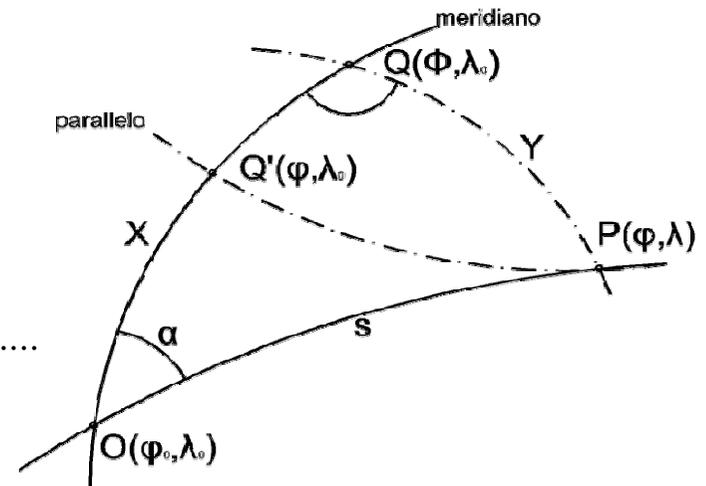


FIG.39

Nel caso in esame, per $\alpha_Q=90$ ed $s=Y$:

$$\varphi - \Phi = \frac{Y \cdot \cos \alpha_Q}{\rho_\Phi} - \frac{Y^2 \cdot \sin \Phi}{2 \cdot \rho_\Phi^2} \cdot \frac{\rho_\Phi}{N_\Phi \cdot \cos \Phi} = \frac{Y^2 \cdot \sin \Phi}{2 \cdot \rho_\Phi^2 \cdot N_\Phi \cdot \cos \Phi} = \frac{Y^2 \cdot \operatorname{tg} \Phi}{2 \cdot \rho_\Phi \cdot N_\Phi}$$

Essendo $\sin \alpha = \sin 90 = 1$ ed avendo messo al 2° membro al posto di $\Phi \rightarrow \varphi$

Inoltre possiamo scrivere che:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{Y}{N_\varphi \cdot \cos\varphi} + \text{trascurabile} \quad \Rightarrow \quad Y = (\lambda - \lambda_0) \cdot N_\varphi \cdot \cos\varphi$$

Quindi:

$$\varphi - \Phi = -\frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot N^2}{2 \cdot \rho \cdot N \cdot \cos\varphi} = -\frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot N}{2 \cdot \rho}$$

Da cui:

$$\Phi = \varphi + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot N}{2 \cdot \rho}$$

E limitandosi ai termini del secondo ordine si ottiene:

$$\begin{cases} X = \rho_m \cdot (\Phi - \varphi_0) \\ Y = r_p \cdot (\lambda - \lambda_0) = N_p \cdot \cos\varphi_p \cdot (\lambda_0 - \lambda) \end{cases}$$

E si possono poi calcolare **s** ed **α**

Negli sviluppi fatti ,vengono trascurati i termini in s^3 (che raggiunge il valore di 0,001 “ per $s = 10$ km) e superiori.