



# Vittorio Casella

Laboratorio di Geomatica - DICAR

Università di Pavia

email: [vittorio.casella@unipv.it](mailto:vittorio.casella@unipv.it)



## Le equazioni di collinearità

### Dispense

# License/Licenza

---



This document is © 2013 **Vittorio Casella, University of Pavia, vittorio.casella@unipt.it**, available under the **creative commons 3.0 license**.

You are free:

to Share — to copy, distribute and transmit the work

to Remix — to adapt the work

to make commercial use of the work.

Under the following conditions:

**Attribution** — You must attribute the work in the manner specified by the author (see the red text above) or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).

**Share Alike** — If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

See <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> for details.



Questo documento è @2013 **Vittorio Casella, Università di Pavia, vittorio.casella@unipv.it**, disponibile sotto la **licenza creative commons 3.0**.

Tu sei libero:

di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera

di modificare quest'opera

di usare quest'opera per fini commerciali

di usare quest'opera per fini commerciali

Alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore (vedo testo in rosso sopra) o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

**Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Per dettagli: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.it>

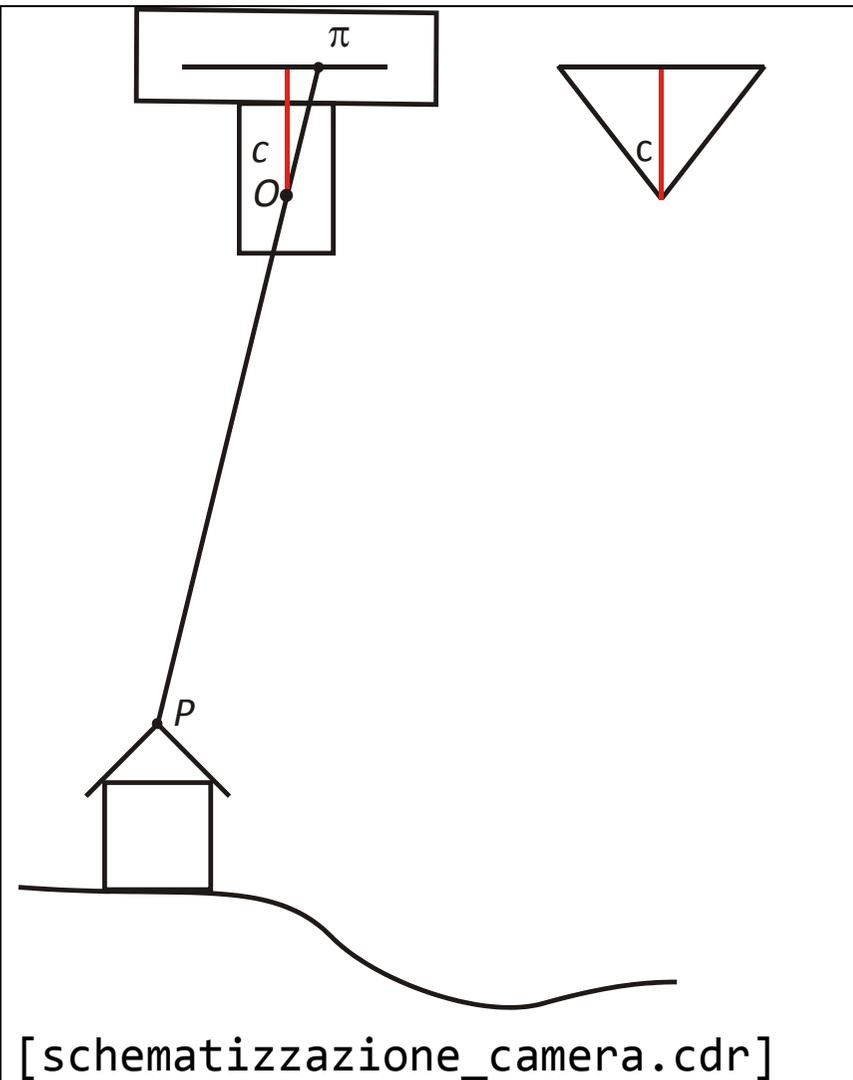
# 1 - Introduzione al problema generale

## La collinearità

Le equazioni di collinearità formalizzano la particolare relazione che lega tre punti notevoli

- il punto-oggetto  $P$
- la sua immagine, il punto-immagine  $\pi$
- il centro di presa  $O$

Come sappiamo, essi appartengono alla stessa retta, cioè sono **collineari**.



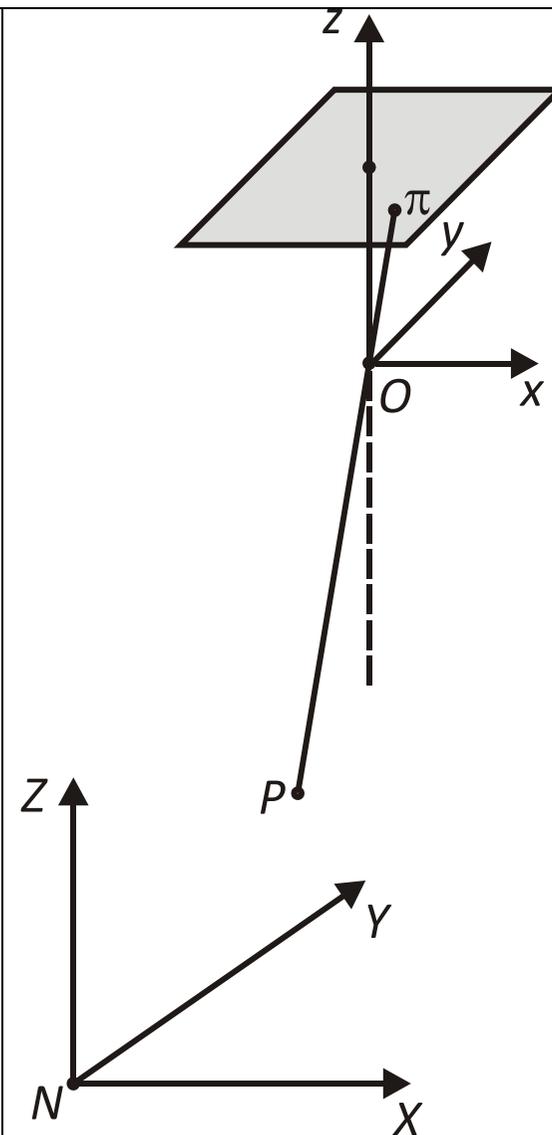
## I SR coinvolti

Il SR oggetto  $(N, X, Y, Z)$ : il SR nel quale si vogliono avere le coordinate dei punti misurati

Il SR di riferimento immagine  $(O, x, y, z)$ : il SR tridimensionale che ha origine nel centro di presa, l'asse  $z$  diretto come l'asse della camera, il piano  $(x, y)$  conseguentemente parallelo al piano focale

I due sistemi sono roto-traslati.

Illustrazione del SR oggetto  $(N, X, Y, Z)$  e di quello immagine  $(O, x, y, z)$ . Viene anche mostrato il piano focale dell'immagine negativa.



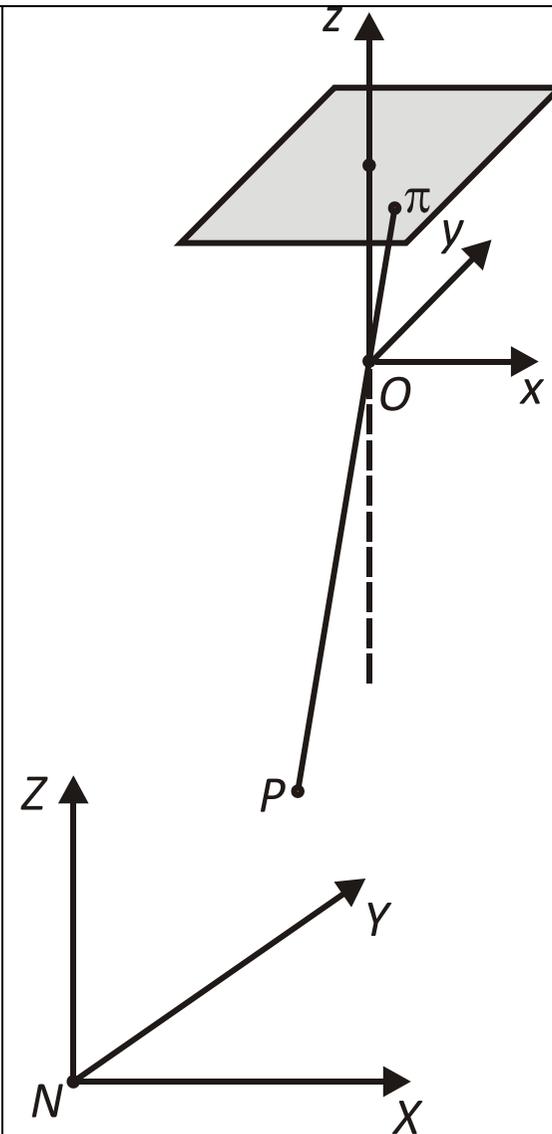
[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_2.cdr,wmf]

## La collinearità - 2

Le equazioni di collinearità legano le coordinate oggetto, riferite a  $(N, X, Y, Z)$ , del punto-oggetto  $P$  con le coordinate immagine  $(O, x, y, z)$  del punto-immagine  $\pi$ .

I due punti considerati appartengono alla retta che passa per  $O$ .

Non si tratta dunque di un problema di trasformazione di coordinate, in cui bisogna legare le coordinate che uno stesso punto ha rispetto a due SR. Qui si hanno due punti e due SR, ma i due punti sono legati dalla collinearità.



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_2.cdr,wmf]

## 2 - La proiezione centrale *pura*

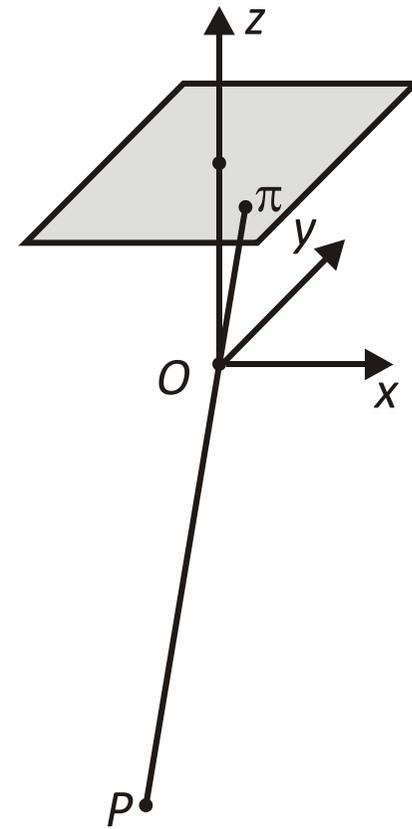
## Introduzione

---

Affrontiamo preliminarmente un problema particolare: caratterizzare la relazione che lega le coordinate immagine del punto-oggetto alle coordinate immagine del punto-immagine.

Detto in altri termini: scegliamo un particolare SR oggetto, che coincide con il SR immagine.

Per ricavare le relazioni, consideriamo due sezioni ortogonali, parallele ai piani  $(x, z)$  e  $(y, z)$

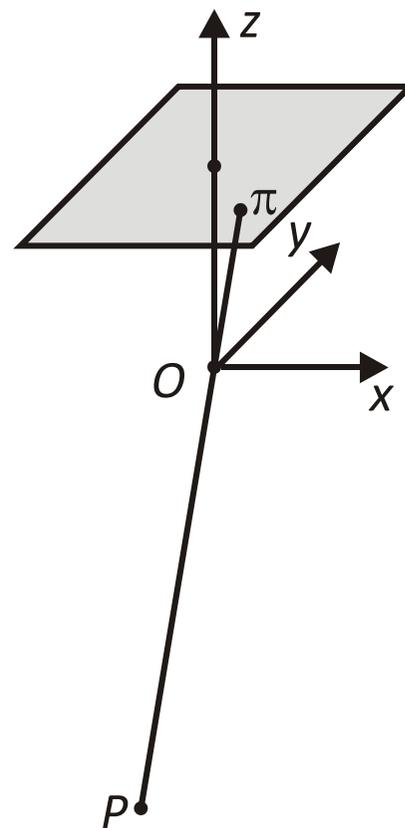


[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_3.cdr,wmf]

## Commento

Può sembrare strano, ma si possono considerare le coordinate-immagine di tutti i punti coinvolti,  $\pi$  e  $P$ , cioè dei punti-immagine e anche dei punti-oggetto: il SR  $(O, x, y, z)$  è un sistema di riferimento nello spazio e può essere usato per associare coordinate a qualunque punto dello spazio.

Di fatto poi, in Fotogrammetria, il SR immagine viene usato per associare coordinate ai soli punti-immagine, ma ciò rappresenta una limitazione di fatto e non di principio.



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_3.cdr,wmf]

## Precisazioni

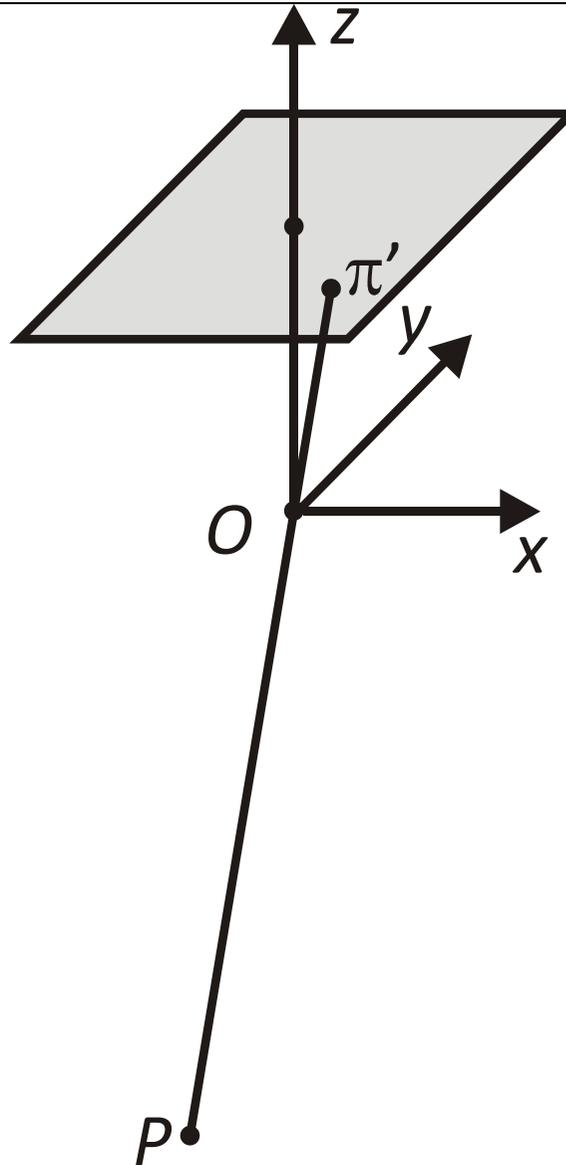
Il piano focale ha equazione

$$z = c$$

L'asse  $z$  coincide con l'asse della camera.

L'origine  $O$  coincide con il centro di presa della camera.

Attenzione: indichiamo il punto-immagine con  $\pi'$ , perché esisterà anche un  $\pi$ .



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_5.cdr,wmf]

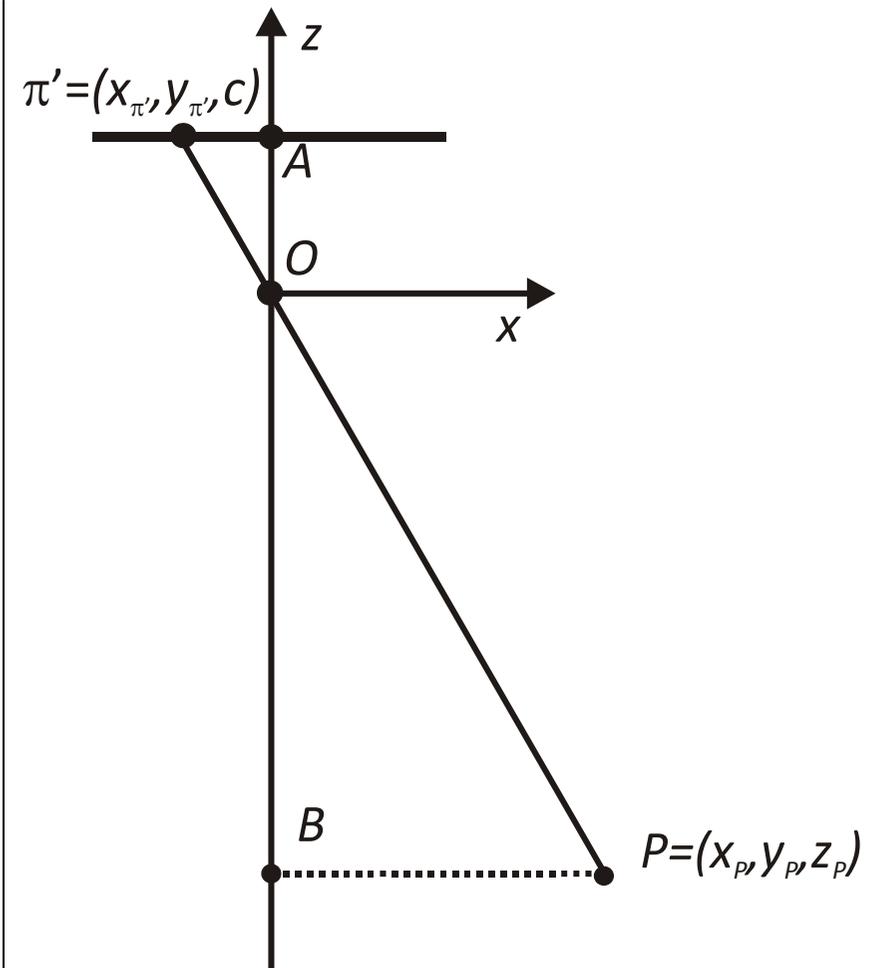
## La sezione (x,z) per l'immagine negativa

I triangoli  $\Delta(B,O,P)$  e  $\Delta(O,A,\pi')$  sono simili perché gli angoli in  $O$  sono opposti al vertice:

$$\frac{X_P}{-Z_P} = \frac{-X_{\pi'}}{C} \quad (1)$$

I due segni meno introdotti ci ricordano che le coordinate hanno segno e che, essendo  $z_p$  e  $x_{\pi'}$  negative, esse devono essere inserite nella proporzione con il segno  $-$ , perché nella proporzione devono comparire le distanze e non le coordinate. Dalla (1) si ottiene

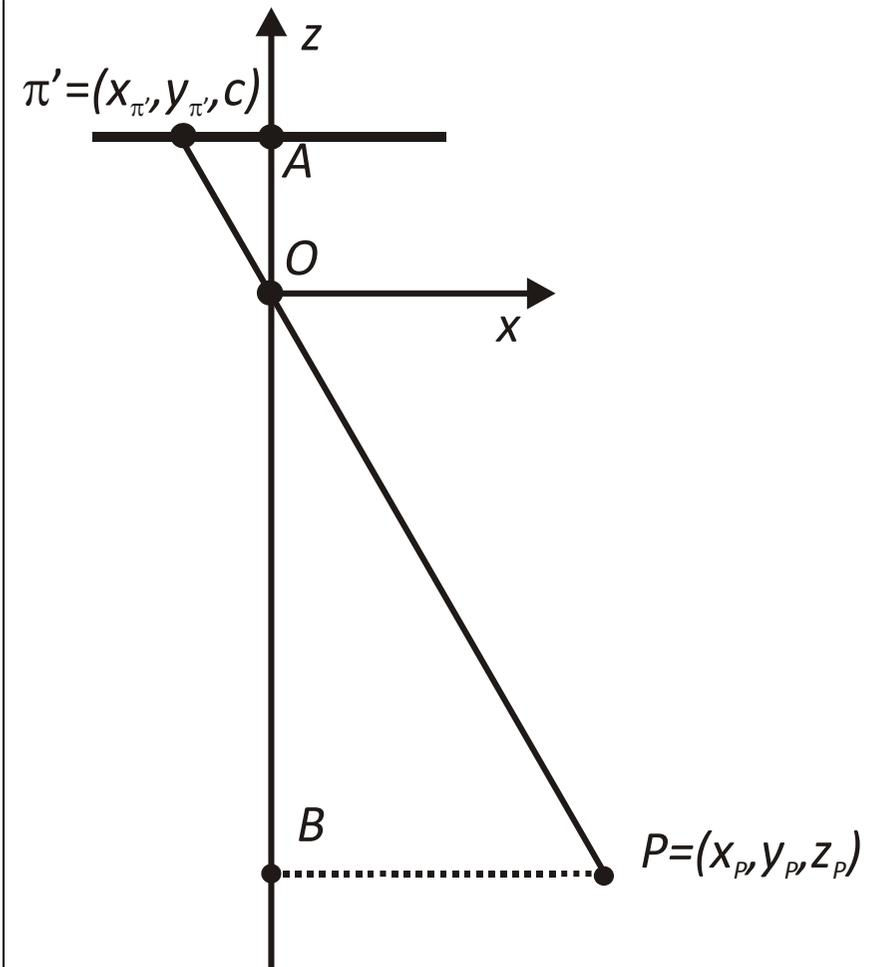
$$x_{\pi'} = C \frac{X_P}{Z_P} \quad (2)$$



[proiezione\_centrale\_1.cdr,wmf]

## Verifiche

Siamo in un caso particolare? Cambierebbe qualcosa se  $P$  fosse a sinistra (coordinata  $x_p$  negativa)? Evidentemente no: la (2) ha valore generale.

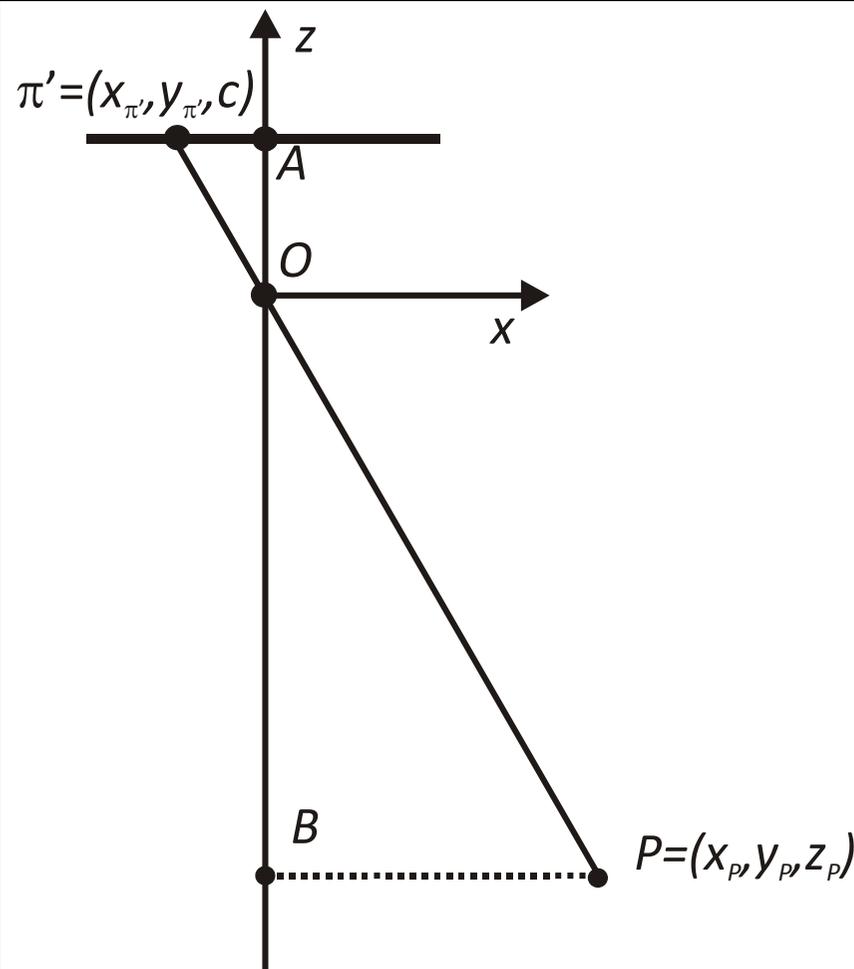


[proiezione\_centrale\_1.cdr,wmf]

## La sezione (y,z) per l'immagine negativa

Che succede se si seziona lungo il piano (y,z)? Evidentemente si ottengono gli stessi risultati, *mutatis mutandis*. Dunque

$$y_{\pi'} = c \frac{y_P}{z_P} \quad (3)$$



[proiezione\_centrale\_1.cdr,wmf]

## Sintesi: equazioni della proiezione centrale per l'immagine negativa

---

In sintesi

$$\begin{aligned}x_{\pi'} &= c \frac{x_p}{z_p} \\y_{\pi'} &= c \frac{y_p}{z_p} \\z_{\pi'} &= c \frac{z_p}{z_p}\end{aligned}\quad (4)$$

La terza relazione è vera ( $z_{\pi'} = c$ ), per quanto banale. In forma vettoriale

$$\mathbf{x}_{\pi'} = \frac{c}{z_p} \mathbf{x}_p \quad (5)$$

## Interpretazione delle equazioni della proiezione centrale

---

La proiezione centrale scala le coordinate di un punto-oggetto in una misura che dipende

- dalla lunghezza focale  $c$
- dalla distanza del punto dal piano  $(x, y)$

Evidentemente punti diversi vengono scalati in misura diversa e ciò distingue una rappresentazione fotografica da una cartografica. Si dice che **una fotografia non è metrica**.

## L'immagine geometricamente positiva

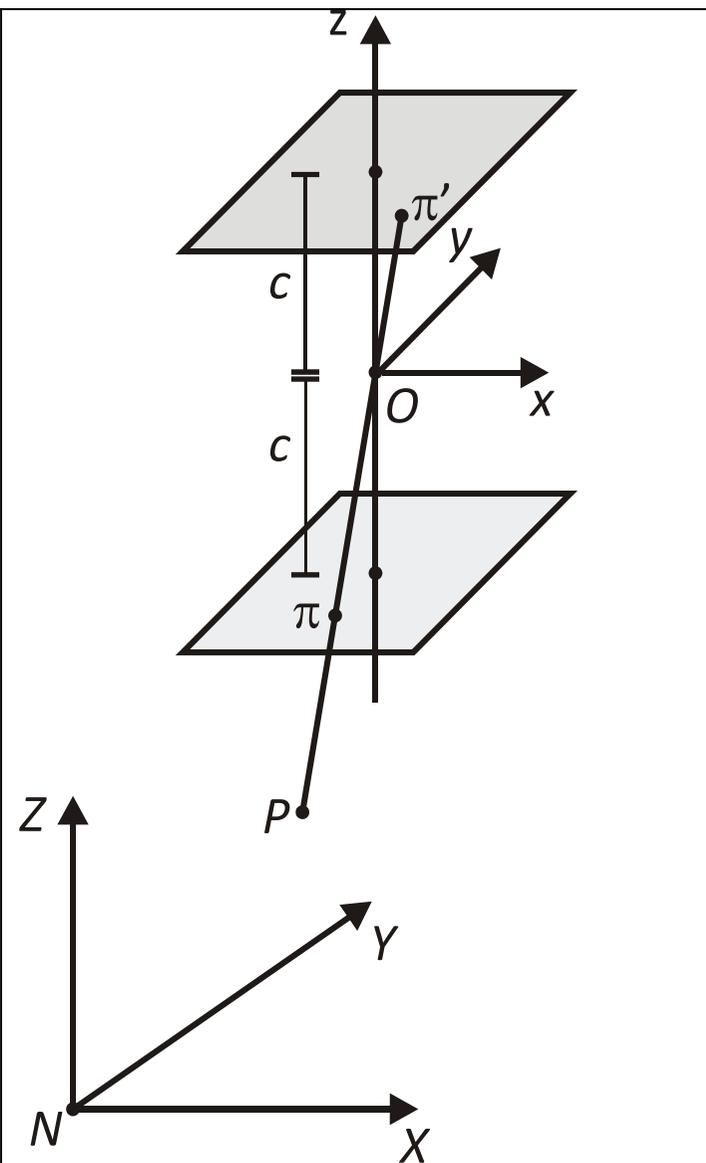
L'immagine prodotta al momento dello scatto è **geometricamente negativa**: destra e sinistra sono scambiate; il piano focale si trova dopo il centro di presa, se osservato da un raggio che viaggia dal punto-oggetto a quello immagine.

Le immagini che osserviamo e sulle quali facciamo misure sono **geometricamente positive**. L'immagine positiva è quella che si formerebbe sul piano

$$z = -c$$

Dunque si trova *prima* del centro di presa.

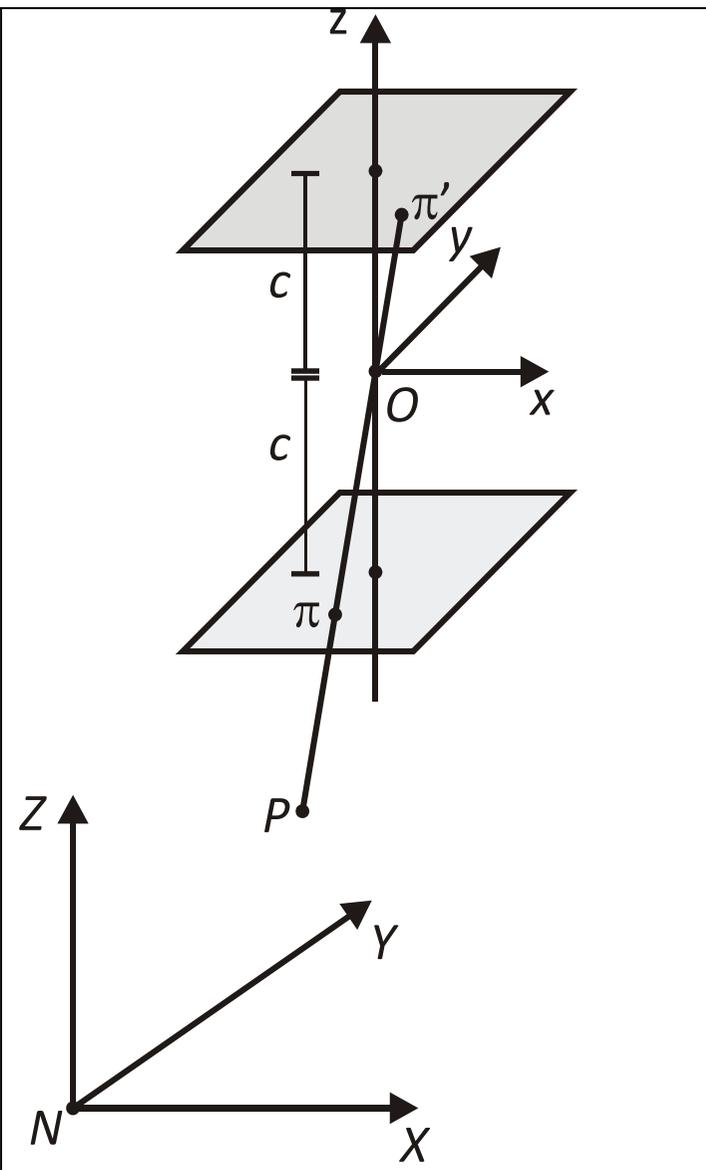
In fotografia analogica, l'immagine positiva viene prodotta in laboratorio per proiezione; in fotografia digitale, con il calcolo.



## Rapporto fra le coordinate immagine di uno stesso punto

Più precisamente: rapporto fra le coordinate immagine dei due punti-immagine  $\pi'$  e  $\pi$  generati rispettivamente sulla negativa e positiva dallo stesso punto-oggetto  $P$ .

Consideriamo la sezione  $(x, z)$



## Rapporto fra le coordinate immagine di uno stesso punto - 2

Consideriamo la sezione  $(x, z)$ : per l'altra sezione  $(y, z)$ , valgono le stesse considerazioni.

I triangoli  $\Delta(D, O, \pi)$  e  $\Delta(O, A, \pi')$  sono identici da cui

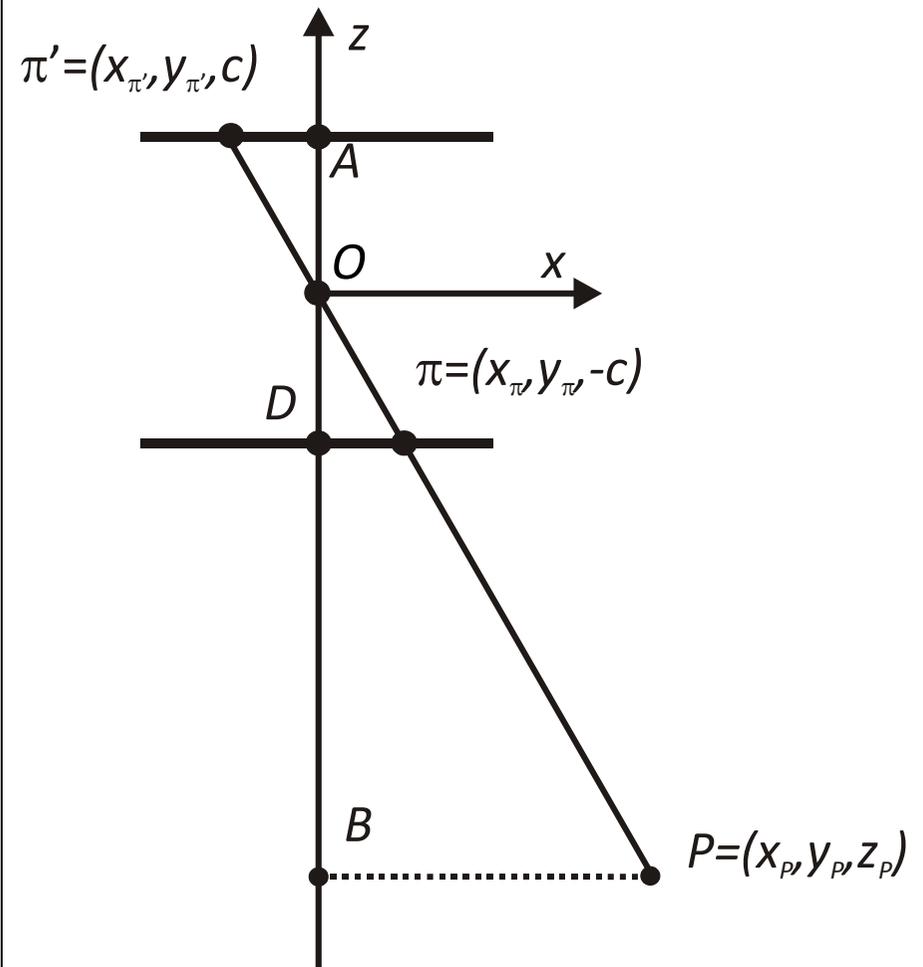
$$x_{\pi'} = -x_{\pi}$$

$$y_{\pi'} = -y_{\pi}$$

$$z_{\pi'} = -z_{\pi}$$

In forma vettoriale

$$\mathbf{x}_{\pi'} = -\mathbf{x}_{\pi} \quad (6)$$



## Equazioni della proiezione centrale per l'immagine positiva

---

Equazioni per la negativa (5)

$$\mathbf{x}_{\pi'} = \frac{c}{z_p} \mathbf{x}_p$$

Rapporti fra positiva e negativa (6)

$$\mathbf{x}_{\pi'} = -\mathbf{x}_{\pi}$$

da cui le equazioni per la positiva

$$\mathbf{x}_{\pi} = -\frac{c}{z_p} \mathbf{x}_p \quad (7)$$

**Da notare che la terza equivale a  $z_{\pi} = -c$ .**

**D'ora in poi verrà considerata solo la positiva.** Perché privilegiare la positiva, vista che l'immagine acquisita è la negativa?

Perché l'immagine osservata per fare le misure è positiva, ottenuta in laboratorio dalla negativa o con il calcolo.

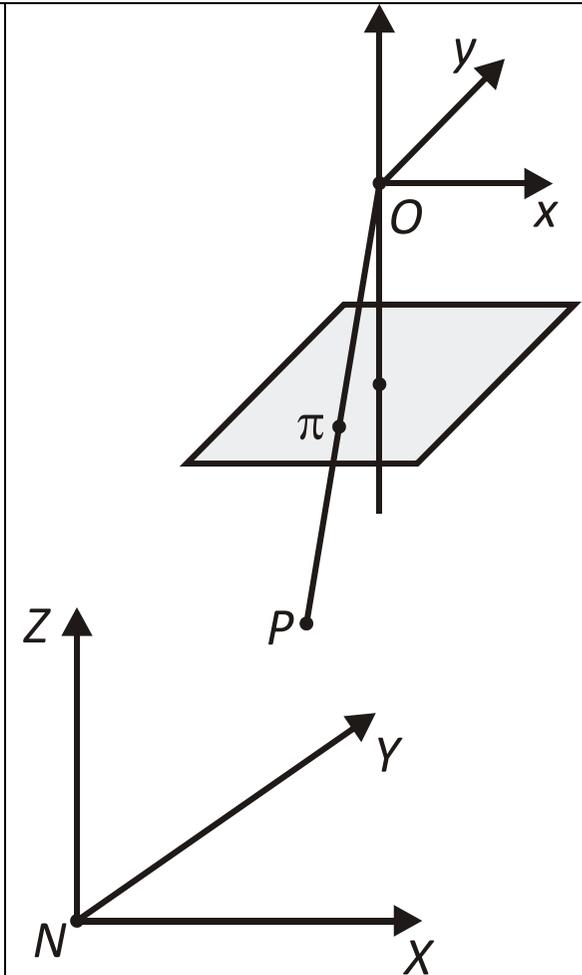
# 3 - Le equazioni di collinearità da oggetto a immagine

## Introduzione e richiami

Trovare la relazione che lega le coordinate oggetto, riferite a  $(N, X, Y, Z)$ , del punto-oggetto  $P$  con le coordinate immagine  $(O, x, y, z)$  del punto-immagine  $\pi$ .

E' già stata trovata la relazione fra le coordinate immagine di  $P$  e  $\pi$ , la (7) per la positiva

$$\mathbf{x}_{\pi} = -\frac{c}{z_p} \mathbf{x}_P$$



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_6.cdr,wmf]

## Rapporto fra i SR oggetto e immagine

Sono evidentemente legati da una rototraslazione nello spazio

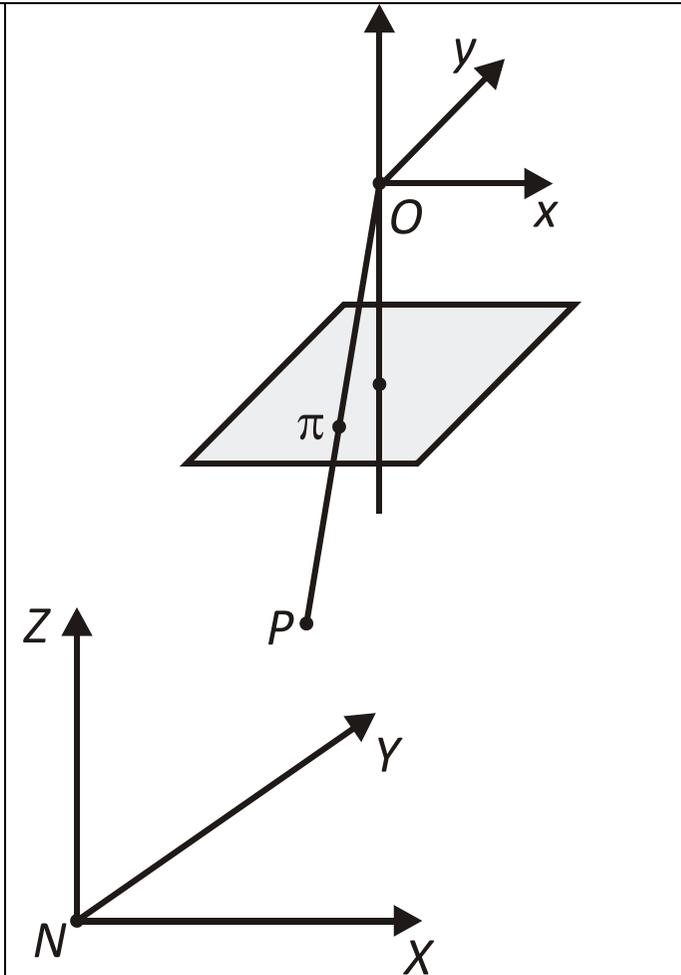
$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_O + \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega})\mathbf{x}_p \quad (8)$$

dove

- $\mathbf{X}_O$ : coordinate oggetto del centro di presa
- $\mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega})$ : matrice di rotazione; non viene specificata la convenzione
- $\boldsymbol{\Omega} = (\omega, \varphi, \kappa)$ : vettore contenente i 3 parametri angolari

La relazione inversa

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{R}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_O) \quad (9)$$



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_6.cdr,wmf]

## Estensione della normale notazione matriciale

---

Per formalizzare in modo compatto, introduciamo la seguente notazione che serve a indicare in blocco righe e colonne di matrici

- $r_{.1}$  indica la prima colonna della matrice **R**
- $r_{.2}$  indica la seconda colonna della matrice **R**
- $r_{2.}$  indica la seconda riga della matrice **R**

Ancora

- $r_{.2}^t$  indica la trasposta della seconda colonna della matrice **R**: si tratta insomma di un vettore riga

## Rapporto fra i SR oggetto e immagine - 2

---

Sviluppiamo la (9) con il formalismo introdotto: ricaviamo le tre relazioni scalari a cui corrisponde. Bisogna effettuare il prodotto righe per colonne. Ricordando che la riga  $i$ -esima di  $\mathbf{R}^t$  corrisponde alla colonna  $i$ -esima di  $\mathbf{R}$  si ha

$$\begin{aligned}x_p &= r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_o) \\y_p &= r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_o) \\z_p &= r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_o)\end{aligned}\quad (10)$$

$$(9) - \mathbf{x}_p = \mathbf{R}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_o)$$

## Le equazioni di collinearità

---

Sviluppiamo preliminarmente la (7) per componenti

$$\begin{aligned}x_{\pi} &= -c \frac{x_p}{z_p} \\y_{\pi} &= -c \frac{y_p}{z_p} \\z_{\pi} &= -c \frac{z_p}{z_p}\end{aligned}\tag{11}$$

$$(7) \quad \mathbf{x}_{\pi} = -\frac{c}{z_p} \mathbf{x}_p$$

$$\begin{aligned}x_p &= r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o) \\(10) \quad y_p &= r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o) \\z_p &= r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_o)\end{aligned}$$

## Le equazioni di collinearità - 2

Facciamo sistema fra le (11) e le (10)

$$x_{\pi} = -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)}$$

$$y_{\pi} = -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)}$$

$$z_{\pi} = -c$$

La terza è banale dunque inutile.

$$(11) \quad x_{\pi} = -c \frac{x_P}{z_P}$$

$$y_{\pi} = -c \frac{y_P}{z_P}$$

$$z_{\pi} = -c \frac{z_P}{z_P}$$

$$x_P = r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)$$

$$(10) \quad y_P = r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)$$

$$z_P = r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_O)$$

## Le equazioni di collinearità - 3

---

Per alleggerire la notazione è possibile omettere i pedici  $\pi$  e  $P$ , che ora sono in sostanza inutili

$$\begin{aligned}x &= -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)} \\y &= -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}x_{\pi} &= -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_o)} \\y_{\pi} &= -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_o)}\end{aligned}$$

## Le equazioni di collinearità nella forma più nota

---

(12)

$$x = -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}$$

$$y = -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}$$

Sviluppando i prodotti nelle (12)

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{r_{11}(\boldsymbol{\Omega})(X - X_o) + r_{21}(\boldsymbol{\Omega})(Y - Y_o) + r_{31}(\boldsymbol{\Omega})(Z - Z_o)}{r_{13}(\boldsymbol{\Omega})(X - X_o) + r_{23}(\boldsymbol{\Omega})(Y - Y_o) + r_{33}(\boldsymbol{\Omega})(Z - Z_o)} \\ y &= -c \frac{r_{12}(\boldsymbol{\Omega})(X - X_o) + r_{22}(\boldsymbol{\Omega})(Y - Y_o) + r_{32}(\boldsymbol{\Omega})(Z - Z_o)}{r_{13}(\boldsymbol{\Omega})(X - X_o) + r_{23}(\boldsymbol{\Omega})(Y - Y_o) + r_{33}(\boldsymbol{\Omega})(Z - Z_o)} \end{aligned} \quad (13)$$

## Le equazioni di collinearità da oggetto a immagine

---

Le equazioni di collinearità

$$x = -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}$$

$$y = -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)}$$

per come sono organizzate, per il fatto di evidenziare a sinistra le coordinate immagine, possono essere definite *da oggetto a immagine*; un'altra espressione significativa è le *equazioni della fotografia*.

Il senso è che le equazioni, scritte in quel modo, indicano le coordinate del punto-immagine note le coordinate del punto-oggetto.

## 4 - Le equazioni di collinearità da immagine a oggetto

## Collinearità I20

---

Le equazioni di collinearità (13) possono essere manipolate in modo da evidenziare a sinistra le coordinate oggetto. Ripartiamo da

$$(7) \quad \mathbf{x}_\pi = -\frac{c}{z_p} \mathbf{x}_p$$

e

$$(9) \quad \mathbf{x}_p = \mathbf{R}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_O)$$

Sostituiamo la seconda nella prima

$$\mathbf{x}_\pi = -\frac{c}{z_p} \mathbf{R}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_O) \quad (14)$$

## Collinearità I2O - 2

---

Ripartiamo dalla (14)

$$(14) \quad \mathbf{x}_\pi = -\frac{c}{z_p} \mathbf{R}^t(\boldsymbol{\Omega})(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_o)$$

Manipoliamola in modo da mettere in evidenza  $\mathbf{X}_p$

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_o - \frac{z_p}{c} \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{x}_\pi$$

Esplicitiamo le componenti

$$X_p = X_o - \frac{z_p}{c} r_{1.}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{x}_\pi \quad (15)$$

$$Y_p = Y_o - \frac{z_p}{c} r_{2.}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{x}_\pi$$

$$Z_p = Z_o - \frac{z_p}{c} r_{3.}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{x}_\pi$$

## Collinearità I2O -3

Le (15) costituiscono un sistema di equazioni. E' possibile ricavare una relazione da una delle equazioni e sostituirla nelle altre. Ricaviamo il valore di  $-\frac{z_P}{c}$  dalla

terza

$$-\frac{z_P}{c} = \frac{Z_P - Z_O}{r_3 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi}$$

Sostituiamolo nelle prime due (sostituirlo nella terza darebbe un'identità)

$$X_P = X_O + (Z_P - Z_O) \frac{r_1 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi}{r_3 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi}$$

$$Y_P = Y_O + (Z_P - Z_O) \frac{r_2 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi}{r_3 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi}$$

Leviamo i pedici  $\pi$  e  $P$ , ora inutili.

(15)

$$X_P = X_O - \frac{z_P}{c} r_1 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi$$

$$Y_P = Y_O - \frac{z_P}{c} r_2 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi$$

$$Z_P = Z_O - \frac{z_P}{c} r_3 \cdot (\mathbf{\Omega})\mathbf{x}_\pi$$

## Collinearità I2O -4

---

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{1.}(\Omega)x}{r_{3.}(\Omega)x} \quad (16)$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{2.}(\Omega)x}{r_{3.}(\Omega)x}$$

Se si sviluppano i calcoli si ottiene la forma più nota

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{11}(\Omega)x + r_{12}(\Omega)y - r_{13}(\Omega)c}{r_{31}(\Omega)x + r_{32}(\Omega)y - r_{33}(\Omega)c} \quad (17)$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{r_{21}(\Omega)x + r_{22}(\Omega)y - r_{23}(\Omega)c}{r_{31}(\Omega)x + r_{32}(\Omega)y - r_{33}(\Omega)c}$$

Nella (16) la lunghezza focale è *nascosta* nel vettore  $\mathbf{x}$  ma esiste.

## Orientamento esterno di un fotogramma

---

Complesso dei parametri che indicano posizione e assetto della camera al momento dello scatto di un fotogramma.

Tali parametri sono 6

$$X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa$$

Sinteticamente si indicano con

- $\mathbf{X}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$
- $\mathbf{\Omega} = (\omega, \phi, \kappa)$

## Generalizzazione delle equazioni di collinearità al caso di numerosi punti e numerose immagini

---

Collinearità O2I per il punto  $i$ -esimo, proiettato sull'immagine  $j$ -esima

$$x_{ij} = -c \frac{r_{.1}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{0j})}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{0j})} \quad (18)$$

$$y_{ij} = -c \frac{r_{.2}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{0j})}{r_{.3}^t(\boldsymbol{\Omega}_j)(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{0j})}$$

Collinearità I2O per il punto  $i$ -esimo, proiettato sull'immagine  $j$ -esima

$$X_i = X_{0j} + (Z_i - Z_{0j}) \frac{r_{1.}(\boldsymbol{\Omega}_j)x_{ij}}{r_{3.}(\boldsymbol{\Omega}_j)x_{ij}} \quad (19)$$

$$Y_i = Y_{0j} + (Z_i - Z_{0j}) \frac{r_{2.}(\boldsymbol{\Omega}_j)x_{ij}}{r_{3.}(\boldsymbol{\Omega}_j)x_{ij}}$$

## La simbologia

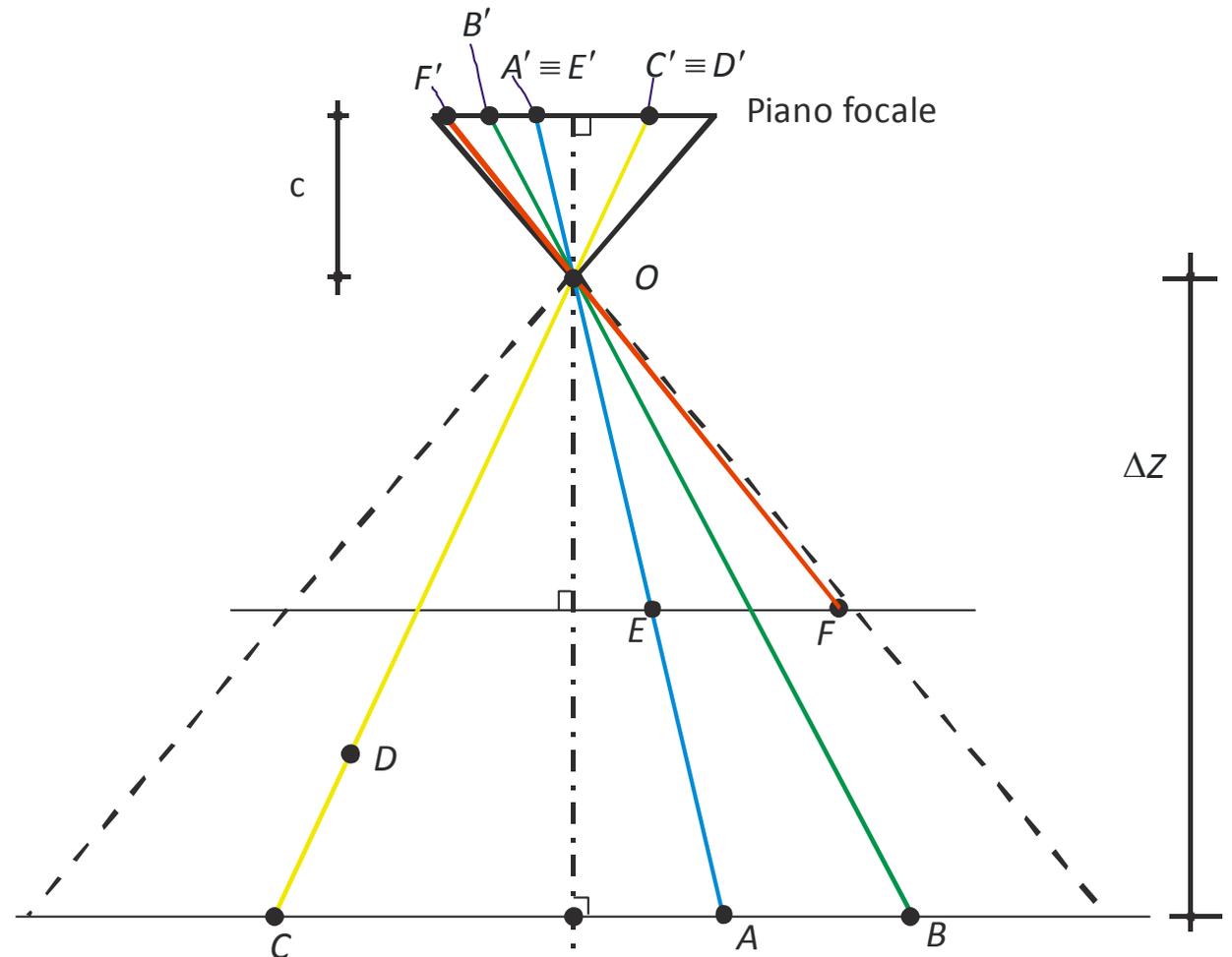
---

- $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$   $i = 1, 2, \dots, p$   $j = 1, 2, \dots, s$ : coordinate immagine del punto  $i$ -esimo proiettato sull'immagine  $j$ -esima.
- $\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$   $i = 1, 2, \dots, p$ : coordinate oggetto del punto  $i$ -esimo. La notazione è indipendente dal fatto che le coordinate siano note a priori (GCP) o meno (TP).
- $\mathbf{X}_{0j} = (X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j})$   $j = 1, 2, \dots, s$ : coordinate oggetto del centro di presa dell'immagine  $j$ -esima.
- $\mathbf{\Omega}_j = (\omega_j, \varphi_j, \kappa_j)$   $j = 1, 2, \dots, s$ : angoli di assetto dell'immagine  $j$ -esima.
- $c$ : lunghezza focale della camera.

## 5 - Immagine positiva e negativa

## Immagine geometricamente positiva e negativa – 1

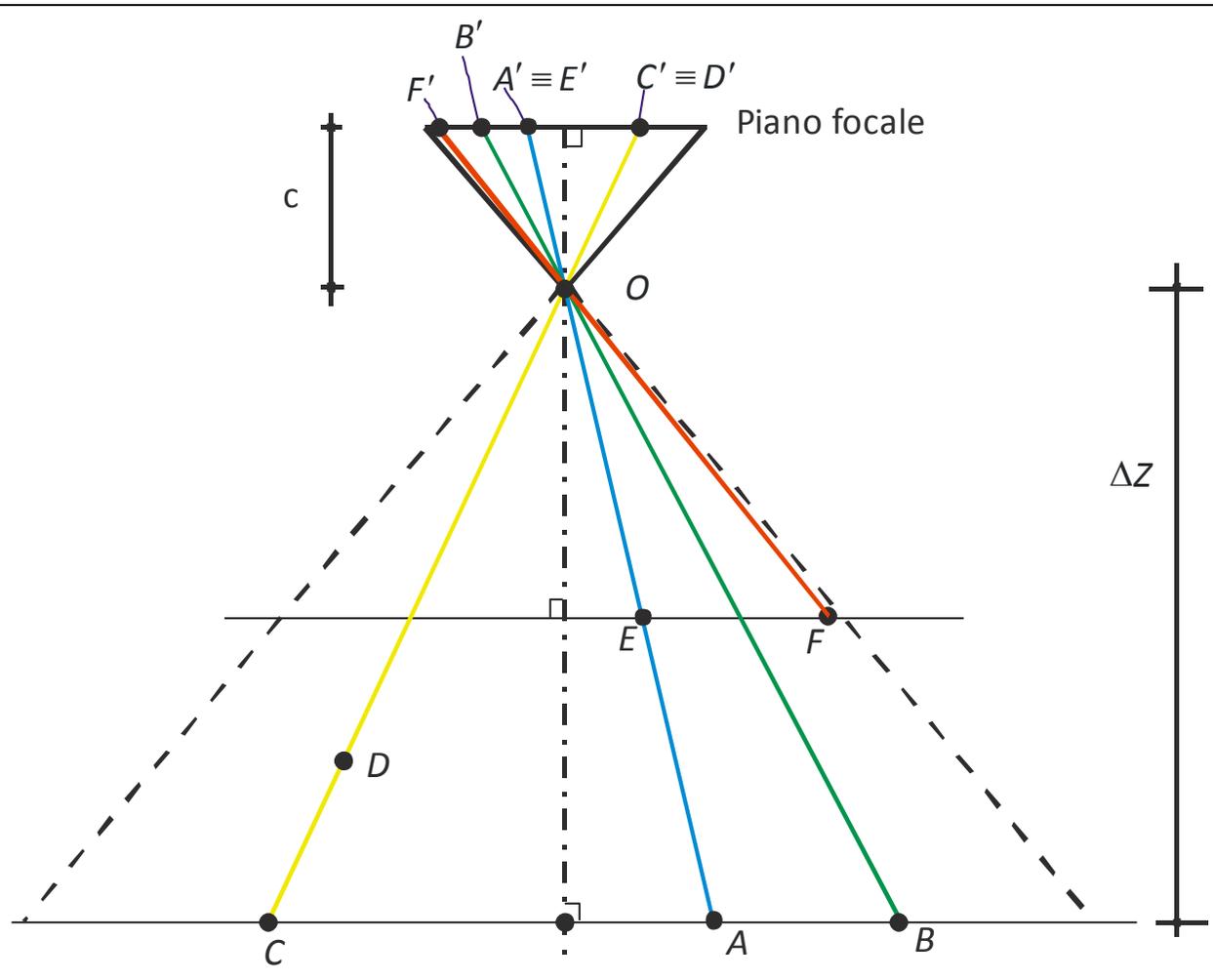
L'immagine negativa è quella prodotta durante l'acquisizione ed è caratterizzata geometricamente dal fatto che il piano dell'immagine si trova *dopo* (visto dal raggio di luce che viaggia dal punto-oggetto al punto-immagine) il centro di presa  $O$ , ad una distanza  $c$  detta *lunghezza focale*, che dipende dalle caratteristiche geometriche della camera impiegata.



## Immagine geometricamente positiva e negativa – 2

Nell'immagine negativa le relazioni spaziali, destra-sinistra, sopra-sotto sono invertite rispetto alla realtà.

Se si considerano i punti  $A$  e  $B$  e le loro proiezioni,  $A'$  e  $B'$ , si può verificare ciò.



## Immagine geometricamente positiva e negativa – 3

---

L'*immagine positiva* è ottenuta nel laboratorio fotografico e corrisponde a quella che si formerebbe su un piano parallelo al precedente ma collocato *prima* del centro  $O$ , a una distanza  $c$ .

Arricchire disegno: inserire il piano della positiva.

## Immagine radiometricamente positiva e negativa

Immagine radiometricamente positiva e negativa. Nella prima i colori corrispondono a quelli reali, nella seconda si ha un'inversione, illustrata dalle due immagini.



[esempio\_positiva.tif, esempio\_negativa.tif]

## Immagine radiometricamente positiva e negativa - 2

---

Caratterizziamo la negativa radiometrica per le immagini pancromatiche.

Un'immagine  $P$  viene rappresentata come matrice

$$P = [p_{ij}] \quad 0 \leq i \leq m \quad 0 \leq j \leq n$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 255$$

La corrispondente negativa  $N$  è caratterizzata da

$$N = [n_{ij}] \quad 0 \leq i \leq m \quad 0 \leq j \leq n$$

$$n_{ij} = 255 - p_{ij}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq 255$$

## 6 - Implicazioni e assunzioni

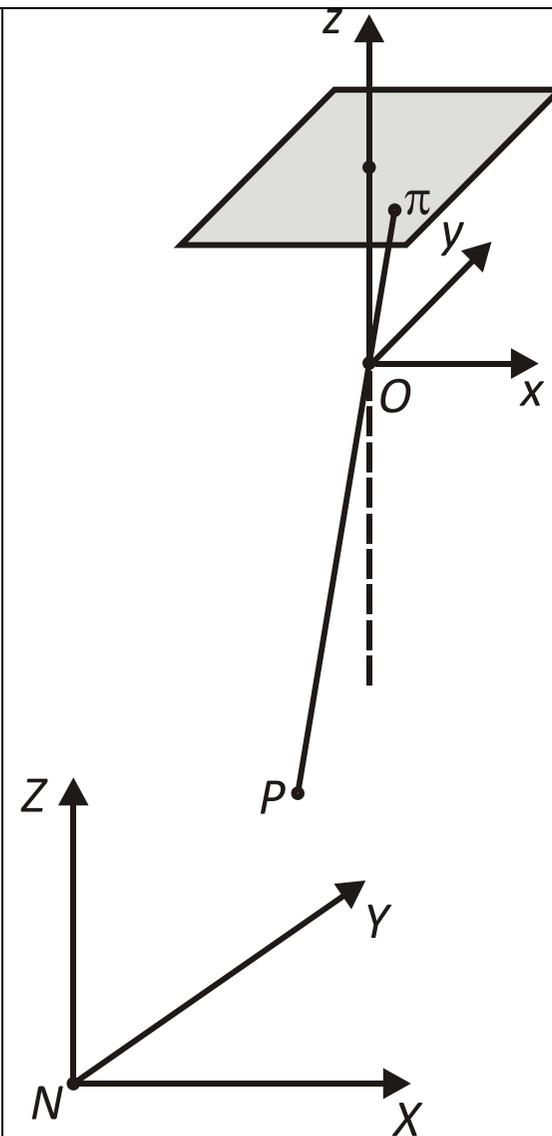
## Il SR immagine

Il SR di riferimento immagine  $(O, x, y, z)$  ha:

- asse  $z$  parallelo all'asse della camera
- origine nel centro di presa

### Implicazioni necessarie

Gli assi  $x, y$  sono paralleli ai bordi del fotogramma. E' una **opportunità**: non è stata usata in alcun modo e non è necessaria, ma considerazioni pratiche la suggeriscono.



[sr\_oggetto\_sr\_immagine\_2.cdr,wmf]

## 7 - Equazioni di collinearità come equazioni di rette

## Domanda preliminare

---

Ripartiamo dalle (16) e ipotizziamo di conoscere

- Le coordinate immagine di un punto immagine
- Il centro di presa
- I parametri angolari

Possiamo determinare le coordinate oggetto?

$$(16) - \begin{aligned} X &= X_o + (Z - Z_o) \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} \\ Y &= Y_o + (Z - Z_o) \frac{r_{2.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} \end{aligned}$$

E' possibile ricavare le coordinate oggetto  $(X, Y, Z)$  di un punto, note le coordinate lastra  $(x, y)$  e noti i parametri dell'orientamento esterno del fotogramma  $(X_o, Y_o, Z_o)$  e  $(\omega, \varphi, \kappa)$ .

## Risposta

---

No!

- Perché abbiamo solo due equazioni
- Perché  $X$  e  $Y$  sono funzione di  $Z$

$$(16) - \begin{aligned} X &= X_o + (Z - Z_o) \frac{r_1.(\Omega)\mathbf{x}}{r_3.(\Omega)\mathbf{x}} \\ Y &= Y_o + (Z - Z_o) \frac{r_2.(\Omega)\mathbf{x}}{r_3.(\Omega)\mathbf{x}} \end{aligned}$$

## Equazioni di collinearità come equazioni di rette - 1

---

Si può dimostrare che le (16) costituiscono l'equazione di una retta nello spazio.

Equazione della retta nel piano

$$ax + by + c = 0$$

Equazione del piano nello spazio

$$ax + by + cz + d = 0$$

Equazione della retta nello spazio: intersezione di due piani

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

## Equazioni di collinearità come equazioni di rette - 2

Prendiamo la prima delle (16): fissati OE e coordinate immagine, si tratta proprio di una retta

$$X = X_o + (Z - Z_o) \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}}$$

$$X - X_o - Z \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} + Z_o \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} = 0$$

$$X - Z \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} + Z_o \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}} - X_o = 0$$

Da cui

$$X = X_o + (Z - Z_o) \frac{r_{1.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}}$$

(16) -

$$Y = Y_o + (Z - Z_o) \frac{r_{2.}(\Omega)\mathbf{x}}{r_{3.}(\Omega)\mathbf{x}}$$

## Equazioni di collinearità come equazioni di rette - 3

---

Da cui

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = -\frac{r_1 \cdot (\Omega) \mathbf{x}}{r_3 \cdot (\Omega) \mathbf{x}}$$

$$d = Z_o \frac{r_1 \cdot (\Omega) \mathbf{x}}{r_3 \cdot (\Omega) \mathbf{x}} - X_o$$

$$X - Z \frac{r_1 \cdot (\Omega) \mathbf{x}}{r_3 \cdot (\Omega) \mathbf{x}} + Z_o \frac{r_1 \cdot (\Omega) \mathbf{x}}{r_3 \cdot (\Omega) \mathbf{x}} - X_o = 0$$

Ciascuna delle (16) rappresenta un piano; il sistema della due equazioni (16) è una retta.

## Determinazione dell'orientamento esterno di uno o più fotogrammi

Si tratta di una fase preliminare necessaria, che sarà illustrata più avanti

# 8 - La misura fotogrammetrica

## Introduzione

---

Noti gli orientamenti esterni dei fotogrammi, si possono effettuare le misure fotogrammetriche che consistono in

- Individuazione su due o più immagini dei punti-immagine generati dallo stesso punto-oggetto; tali punti sono detti anche punti omologhi;
- misura delle coordinate-immagine dei punti immagine
- determinazione delle coordinate-oggetto del punto-oggetto con il calcolo

La misura fotogrammetrica può essere effettuata per i punti visibili su almeno due fotogrammi.

In linea di principio lo stesso punto può essere osservato su più di due fotogrammi, aumentando così la ridondanza.

## Introduzione - 2

---

Vi sono vari metodi per effettuare la misura fotogrammetrica. Viene mostrato qui un metodo classico ed elementare, che può essere applicato solo alle misure di modello singolo, in cui vengono usate due immagini.

## I dati

---

Consideriamo due immagini, 1 e 2, di cui conosciamo l'orientamento esterno

$$(\mathbf{x}_{o1}, \mathbf{\Omega}_1) \quad (\mathbf{x}_{o2}, \mathbf{\Omega}_2)$$

Consideriamo il generico punto  $P$  e le sue coordinate oggetto

$$\mathbf{x} = (X, Y, Z)$$

Consideriamo anche le coordinate immagine

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$$

$$\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$$

Generalizziamo le notazioni delle equazioni di collinearità per tenere conto dell'esistenza di diverse immagini

## Il sistema di equazioni

---

Si possono scrivere quattro equazioni nelle tre incognite  $(X, Y, Z)$ . Per la prima immagine

$$X = X_{O1} + (Z - Z_{O1}) \frac{r_1 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}{r_3 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}$$

$$Y = Y_{O1} + (Z - Z_{O1}) \frac{r_2 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}{r_3 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}$$

Per la seconda

$$X = X_{O2} + (Z - Z_{O2}) \frac{r_1 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}{r_3 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}$$

$$Y = Y_{O2} + (Z - Z_{O2}) \frac{r_2 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}{r_3 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}$$

Orientamenti esterni e coordinate immagine sono diverse. Le coordinate oggetto sono le stesse.

## Il sistema di equazioni - 2

---

Riscriviamo l'intero sistema isolando dei termini costanti

$$\begin{aligned} X &= X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} & K_{x1} &= \frac{r_1 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}{r_3 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1} \\ Y &= Y_{01} + (Z - Z_{01})K_{y1} & K_{y1} &= \frac{r_2 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1}{r_3 \cdot (\Omega_1) \mathbf{x}_1} \\ X &= X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2} & K_{x2} &= \frac{r_1 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}{r_3 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2} \\ Y &= Y_{02} + (Z - Z_{02})K_{y2} & K_{y2} &= \frac{r_2 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2}{r_3 \cdot (\Omega_2) \mathbf{x}_2} \end{aligned} \tag{20}$$

I termini frazionari giocano semplicemente il ruolo di grandezze note, dunque vengono sinteticamente indicati con  $K_x$  e  $K_y$ .

Si tratta di un sistema di 4 equazioni nelle 3 incognite  $((X, Y, Z))$ .

## La strategia per la soluzione

---

Consideriamo il sottosistema costituito dalla prima e dalla terza equazione delle

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1}$$

$$X = X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2}$$

Esso è equivalente al sistema costituito dalla prima e dalla differenza fra le due, cioè

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1}$$

$$X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} - (X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2}) = 0$$

(21)

Sviluppiamo la seconda

## La soluzione per $X$ e $Z$

---

$$\begin{aligned}X_{01} + (Z - Z_{01})K_{x1} &= X_{02} + (Z - Z_{02})K_{x2} \\X_{01} + ZK_{x1} - Z_{01}K_{x1} &= X_{02} + ZK_{x2} - Z_{02}K_{x2} \\Z(K_{x1} - K_{x2}) &= X_{02} - X_{01} - Z_{02}K_{x2} + Z_{01}K_{x1} \\Z &= \frac{X_{02} - X_{01} - Z_{02}K_{x2} + Z_{01}K_{x1}}{K_{x1} - K_{x2}}\end{aligned}$$

(22)

Sostituiamo nella prima delle (21) per ottenere  $X$ .

## La soluzione per $Y$

---

Il calcolo di  $Y$  può essere effettuato mediante la seconda o la quarta. Si ha

$$Y^{(1)} = Y_{01} + (Z - Z_{01})K_{y1}$$

$$Y^{(2)} = Y_{02} + (Z - Z_{02})K_{y2}$$

Dal punto di vista puramente geometrico esse sono equivalenti, ma se le coordinate lastra vengono misurate, come avviene durante la restituzione fotogrammetrica, esse forniranno risultati diversi in quanto a secondo membro si trovano misure diverse. Tale differenza può essere usata per validare le misure effettuate.